

---

# ATTRITO (friction)

---

Attrito radente, volvente, forze viscosse  
(sliding friction, rolling friction, viscous  
friction)

# Forze di attrito (friction forces)

L'**attrito** è la forza che si esercita tra due **superfici a contatto tra loro** e si oppone al loro moto relativo. (friction = force between two surfaces in contact with one another, which opposes the relative motion)

La forza d'attrito che si manifesta tra superfici in quiete tra loro è detta di attrito statico, tra superfici in moto relativo si parla invece di attrito dinamico.

(If there is no relative motion, the friction is said *static*, otherwise it is called *dynamic friction*)

Secondo l'interpretazione classica, esistono tre diversi tipi di attrito:

(according to classic interpretation, there are 3 kinds of friction: )

**attrito radente**: dovuto allo strisciamento; (sliding friction)

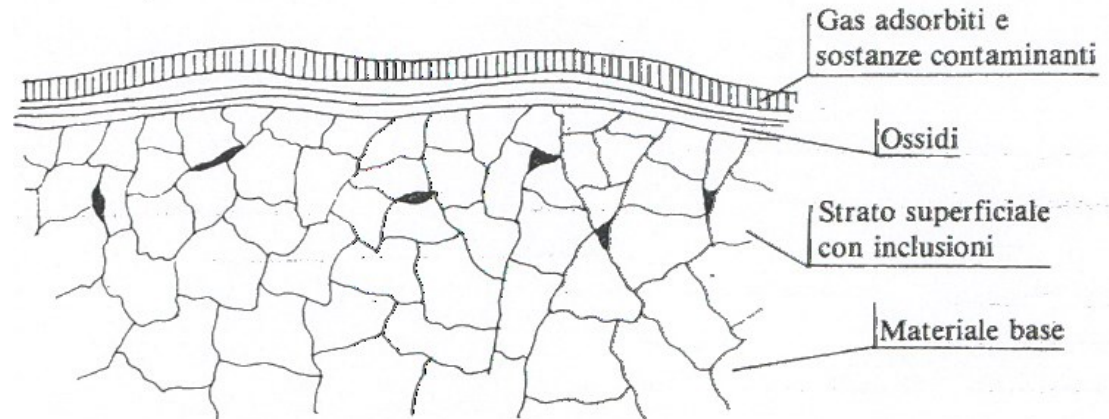
**attrito volvente**: dovuto al rotolamento; (rolling friction)

**attrito del mezzo**: relativo a un corpo immerso in un fluido. (viscous friction)

# Contatto di strisciamento fra solidi

La superficie di un corpo solido non é quasi mai perfettamente pulita.

(surfaces are never perfectly clean)

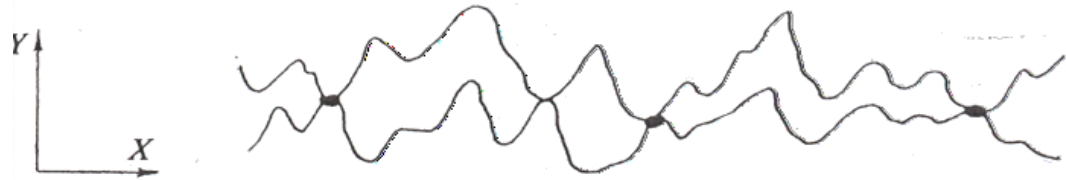


Una superficie metallica asciutta é ricoperta da più pellicole sovrapposte di costituenti diversi: (on a metallic surface you can find: )

1. a contatto con il metallo si forma uno strato di *ossido* ( $1/100 \mu\text{m}$ ) (oxide)
2. in presenza di aria si forma uno strato sottilissimo di *vapor d'acqua e di ossigeno* ( $1/10000 \mu\text{m}$ ) (in presence of air, a thin layer of steam and oxygen)
3. *pellicola di grasso* ( $1/1000 \mu\text{m}$ ) (a layer of grease)

# Contatto di strisciamento fra solidi

Le superfici reali non sono mai perfettamente lisce, ma hanno sempre una certa rugosità. (roughness of surfaces, not smooth)



Il contatto fra due corpi solidi é localizzato su zone ristrette, dove le asperità di una superficie vengono a contatto con le asperità dell'altra. (the contact between the two surfaces takes place on very small areas)

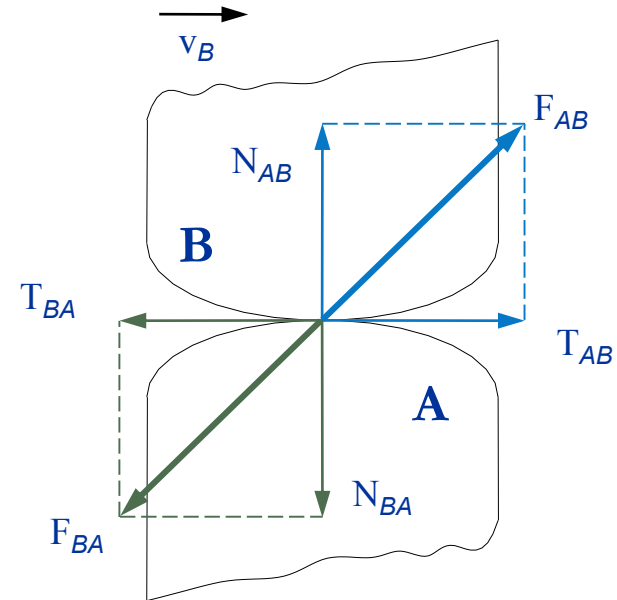
Le forze di attrito nascono esclusivamente nelle zone di contatto, ossia su una superficie estremamente più piccola di quella di contatto apparente. (the real contact surface is smaller than the apparent one)

A causa dell'elevata pressione si hanno quindi fenomeni di manifestazione di microgiunzioni (saldature a freddo) tra i materiali dei due membri per le elevate pressioni locali, per la cui rimozione, in fase di avvio del moto relativo (primo distacco), sono necessarie forze superiori ( $f_a > f$ ). (due to the high local pressure in contact areas, microweldings occur; to have relative motion, they must be broken and a higher force is required)

# Contatto di strisciamento fra solidi (sliding)

Due membri a contatto si scambiano due forze aventi uguale modulo e direzione e verso opposto ( $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$ ).

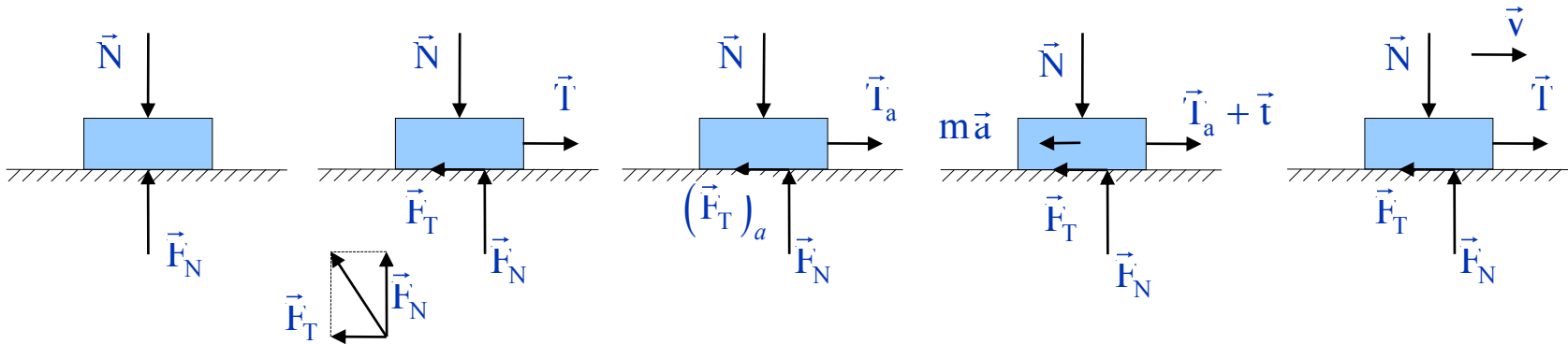
La pressione locale che un membro esercita su di un altro può essere scomposta in due componenti, una normale alla superficie di contatto ( $\mathbf{N}_{AB} = -\mathbf{N}_{BA}$ ) ed una lungo la tangente alla superficie di contatto ( $\mathbf{T}_{AB} = -\mathbf{T}_{BA}$ ). (the resultant of contact pressure can be decomposed into two components, N and T)



## Lavoro d'attrito (work)

$$\begin{aligned} L_{\text{att.}} &= (\vec{F}_{AB} \times \vec{v}_B + \vec{F}_{BA} \times \vec{v}_A) \, dt = \\ &= \vec{F}_{AB} \vec{v}_{BA} \, dt = \vec{F}_{BA} \vec{v}_{AB} \, dt \end{aligned}$$

# Coefficienti di attrito e di aderenza



coefficiente di aderenza (coeff. di primo distacco o statico)  
(static friction coefficient)

$$f_a = \frac{(F_T)_a}{F_N}$$

coefficiente di attrito (radente o cinetico) (sliding friction coefficient)

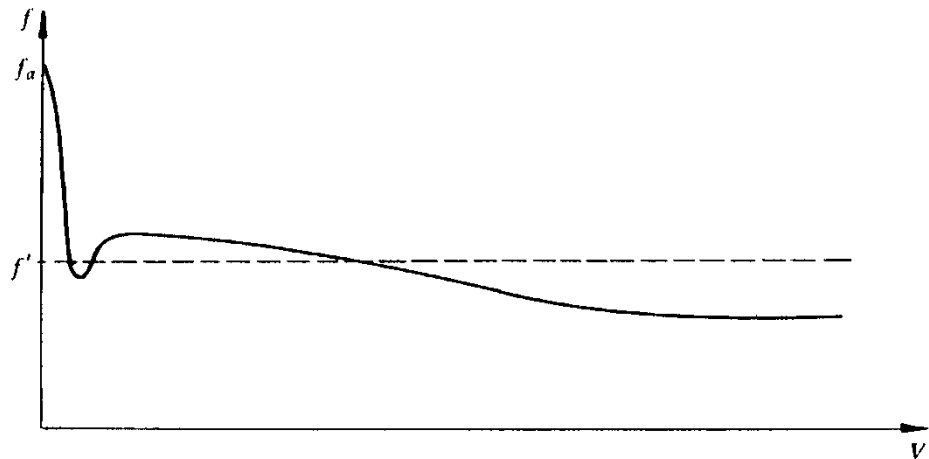
$$f = \frac{F_T}{F_N}$$

# Coefficienti di attrito e di aderenza

L'attrito tra due membri dipende esclusivamente dallo stato delle superfici di contatto. Nel caso di superfici perfettamente asciutte, si parla di attrito coulombiano, per cui valgono le seguenti: (the friction coefficient depends only on the roughness of contact surfaces):

- il coefficiente di attrito è indipendente dal carico ( $df/dF=0$ )
  - il coefficiente di attrito è indipendente dall'area di contatto  $S$  ( $df/dS=0$ )
  - il coefficiente di attrito è indipendente dalla velocità relativa di strisciamento  $v_{AB}$  ( $df/dv_{AB}=0$ )
- (the friction coefficient does not depend on the load, nor on the contact area, nor on the relative velocity)

In realtà la terza delle leggi riportate non è sempre verificata. (actually, in some cases it is function of the velocity)



# Coefficienti di attrito e di aderenza

L'attrito in generale in meccanica è un fenomeno classificabile come:

(friction can be: )

**utile:** nelle coppie superiori di frizione (ruota-rotai, ruota-strada) o in meccanismi di dissipazione di energia (freni, frizioni) (useful: in applications like brakes or contact between wheel and road)

**dannoso:** rispetto ad uno stato di moto, dissipando energia (in termini di trasformazione in energia di calore) riducendo l'efficienza di una macchina (o meccanismo). (damaging: it reduces the efficiency/performance of a mechanism)



# Angolo di aderenza

$$\frac{F_T}{F_N} \leq f_a$$

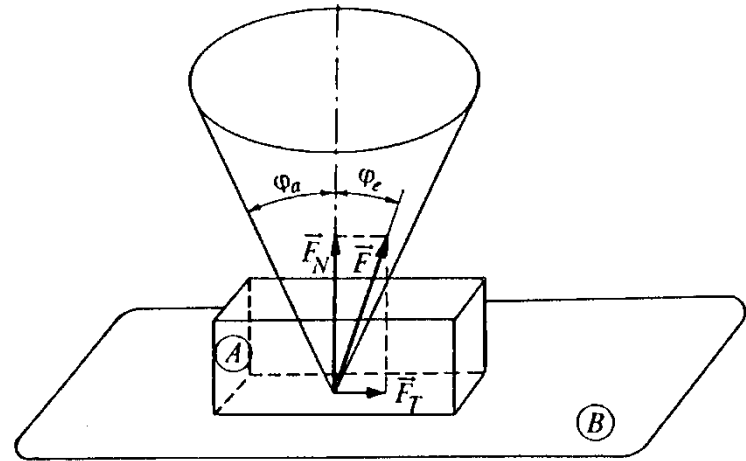
posto:  $\text{Tg} \varphi_e = \frac{F_T}{F_N} \rightarrow \text{Tg} \varphi_e \leq f_a$

angolo di aderenza:  
(adherence angle)

$$\text{Tg} \varphi_a = f_a \rightarrow \varphi_e \leq \varphi_a$$

Affinché il corpo A sia in quiete rispetto a B é necessario che l'angolo  $\varphi_e$  formato dalla direzione della risultante delle forze scambiate con la normale alle superfici di contatto sia minore dell'angolo di aderenza  $\varphi_a$

(if this condition is satisfied, there is no relative motion between A and B)



# Angolo di attrito

Quanto detto per l'aderenza vale anche per l'attrito, si definisce angolo di attrito l'angolo  $\varphi$  mediante la relazione: (friction angle  $\varphi$ )

$$\text{Tg}\varphi = f$$

durante lo strisciamento, il rapporto fra le componenti tangenziale e normale della forza scambiata tra le due superfici vale:

$$f = \frac{F_T}{F_N}$$

la risultante  $\mathbf{F}$  delle forze scambiate é inclinata, rispetto la normale alle superfici di contatto, dell'angolo  $\varphi$ . (the resultant  $F$  is inclined  $\varphi$  of the angle with respect to the normal to the contact surface)

# Angolo di attrito

Il coefficiente di attrito cinetico  $f$  non è costante. ( $f$  is not constant)

I valori sono forniti dai manuali tecnici. ( )

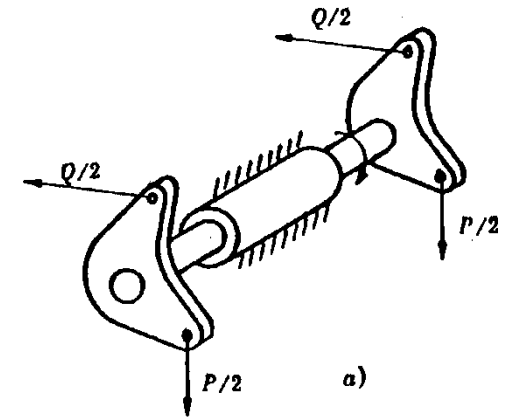
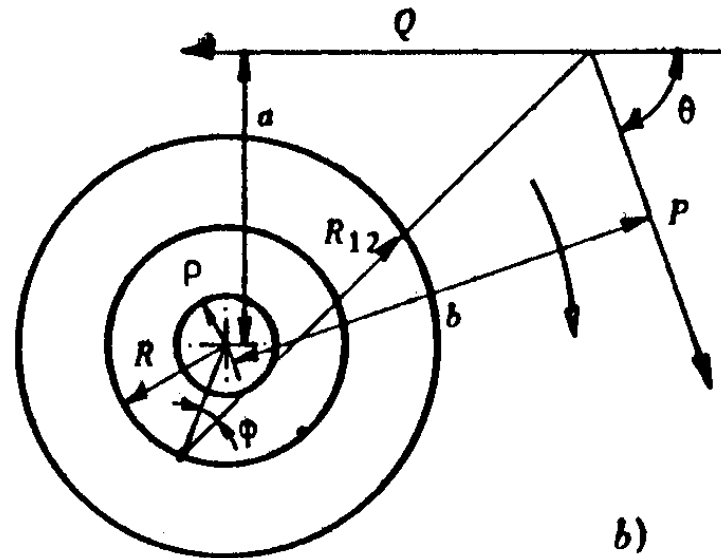
Materiali	$f_a$	$f$
Acciaio duro su acciaio duro	0,78	0,42
Alluminio su alluminio	1,40	1,25
Grafite su acciaio	0,15	0,10
Pneumatici su asfalto asciutto	0,75	0,60
Ruote di acciaio su rotaie	0,24	0,07

# Coppia rotoidale con attrito

In presenza di un moto di strisciamento fra le superfici coniugate delle coppie rotoidali, la reazione si inclina dell'angolo di attrito rispetto alla normale comune alle due superfici. (in case of motion in a revolute pair, the reaction is inclined of the friction angle with respect to the normal to the surface)

**circolo d'attrito**  
**circle of friction**

$$\rho = R \cdot \sin \varphi$$



# Attrito Volvente

L'attrito volvente si presenta quando un corpo cilindrico o una ruota rotola senza strisciare su una determinata superficie. Il rotolamento è reso possibile dalla presenza dell'aderenza tra la ruota e il terreno; se questo attrito non ci fosse, o fosse minimo (come nel caso di un terreno ghiacciato), la ruota striscerebbe senza riuscire a rotolare. (rolling friction: in case a cylindrical body or a wheel rolls without sliding on a surface; it is possibile due to the adherence)

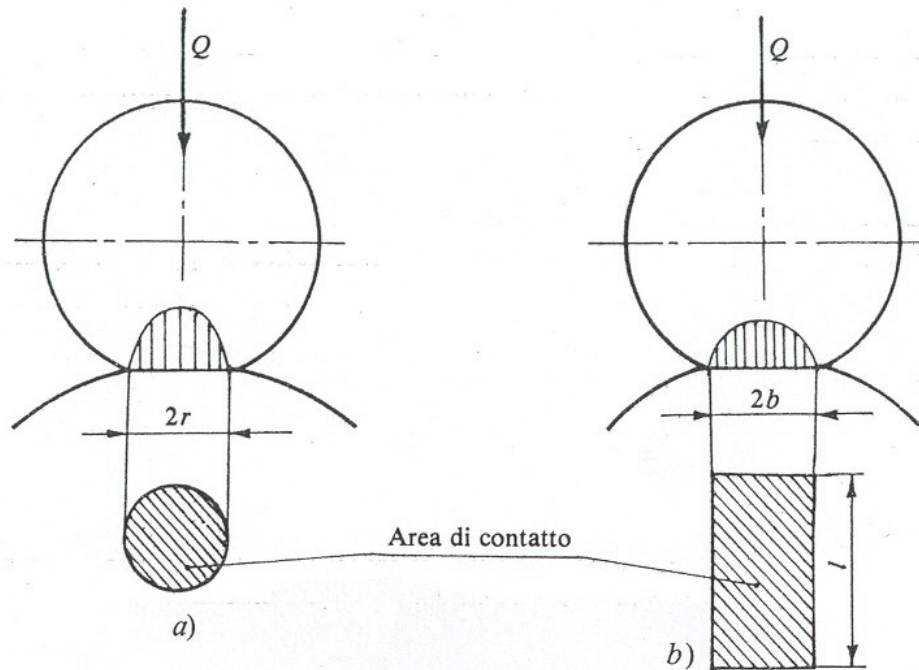
L'attrito volvente è determinato soprattutto dall'attrito sull'asse di rotazione della ruota e dall'area di contatto tra la ruota e il terreno.

Il contatto di rotolamento avviene tra superfici rigide e non combacianti (cilindro-piano, cilindro-cilindro, sfera-piano) . In molto casi non si ha semplice rotolamento ma rotolamento e strisciamento locale (ruote dentate). (in many cases there occur both sliding and rolling friction (as for gears))

# Attrito Volvente (rolling friction)

## TEORIA DI HERTZ (Hertz theory)

Se due corpi elastici, limitati da superfici a doppia curvatura, vengono premuti l'uno contro l'altro, la proiezione, sul piano normale alla direzione di accostamento, della superficie di contatto é un'ellisse. (when two elastic bodies, with surfaces with double curvature, are pressed one against the other, the contact area is elliptic)



Le cause fisiche della resistenza al rotolamento sono essenzialmente tre:

- imperfezioni elastiche dei materiali a contatto;
- strisciamento fra i due corpi;
- imperfezioni del terreno.

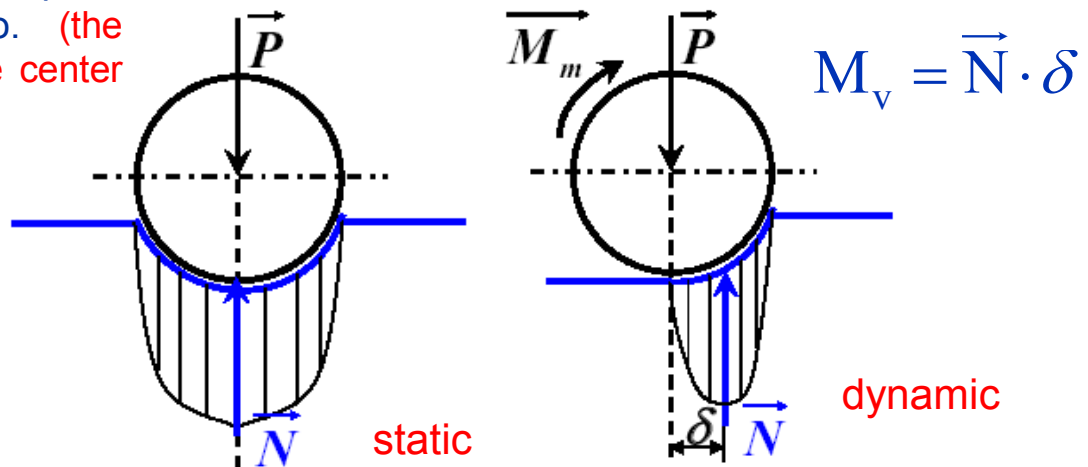
# Attrito Volvente (rolling friction)

Si consideri un corpo cilindrico di peso  $P$  appoggiato su un piano orizzontale; poiché il piano d'appoggio non è perfettamente rigido, sotto l'azione del peso del corpo si deforma e si crea una superficie di contatto tra il piano d'appoggio ed il corpo. (due to its weight, the body exhibit a deformation; hence, there is a non-zero contact area)

Nel baricentro di tale superficie si sviluppa una reazione vincolare  $N$  dovuta alle pressioni esercitate dal corpo di peso  $P$  sulla superficie di contatto. (the reaction force  $N$  is applied to the center of mass of the surface)

Se il corpo è fermo si trova nella condizione di equilibrio poiché il peso  $P$  è uguale e contrario alla reazione vincolare  $N$ .

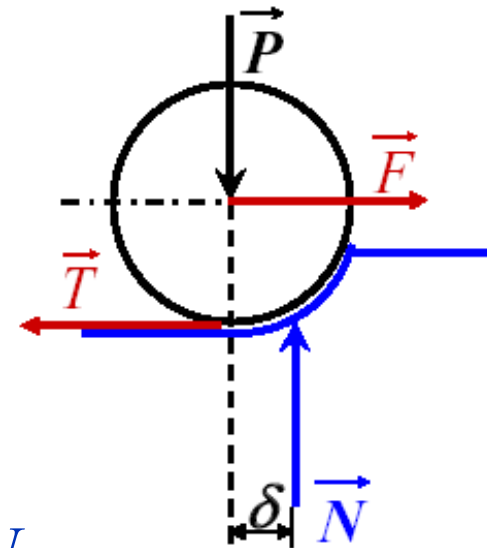
Se il corpo è in movimento e si muove di moto rettilineo uniforme sotto l'azione di un momento  $M_m$  la reazione vincolare  $N$  dovuta alla pressione esercitata dal corpo sulla superficie di contatto è spostata in avanti nella direzione del moto e si crea tra la forza peso  $P$  e la reazione vincolare  $N$  una distanza  $\delta$  e quindi un momento resistente  $M_v$  dato da:



# Attrito Volvente

Se applichiamo una forza di trazione invece del momento motore

$$\begin{cases} F = T \\ N = P \\ F \cdot r = N \cdot \delta \rightarrow F = \delta/r \cdot N = f_v \cdot N \end{cases}$$



$$f_v = \delta/r$$

**Coefficiente di  
Attrito Volvente**



# Attrito Volvente

Per la resistenza al rotolamento sono state proposte alcune formule:  
(for rolling friction some formulas have been proposed)

contatto fra sfere di acciaio ad assi paralleli:

$$r = 1,11 \sqrt[3]{\frac{Q}{E\rho}} \quad \text{dove:} \quad \rho = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

contatto fra cilindri di acciaio ad assi paralleli:  
(contact between two cylindrical bodies with parallel axes)

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{Q}{E\rho l}}$$

Il diagramma della distribuzione della pressione é un semiellissoide.  
(the pressure distribution is elliptic)

# Attrito Volvente

Formula di Gerstener-Coriolis

$$u = \alpha^3 \sqrt{\frac{F_N r}{b}} \quad \text{dove } \alpha = \text{costante}$$

b = larghezza del cilindro.  
(height of the cylinder)

Per deformazione elastica:  $u \cong k F_N^{0,2}$

per deformazioni elastiche plastiche:  $u \cong k F_N$

La resistenza al rotolamento dipende dalla velocità angolare alle alte velocità:  
per i pneumatici su strada asfaltata si ha:

$$f_v = f_{v0} + k_v \omega^2 \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} k_v &\cong 1,5 \times 10^{-6} s^2 / rad^2 \\ f_{v0} &= 0,012 - 0,015 \end{aligned}$$

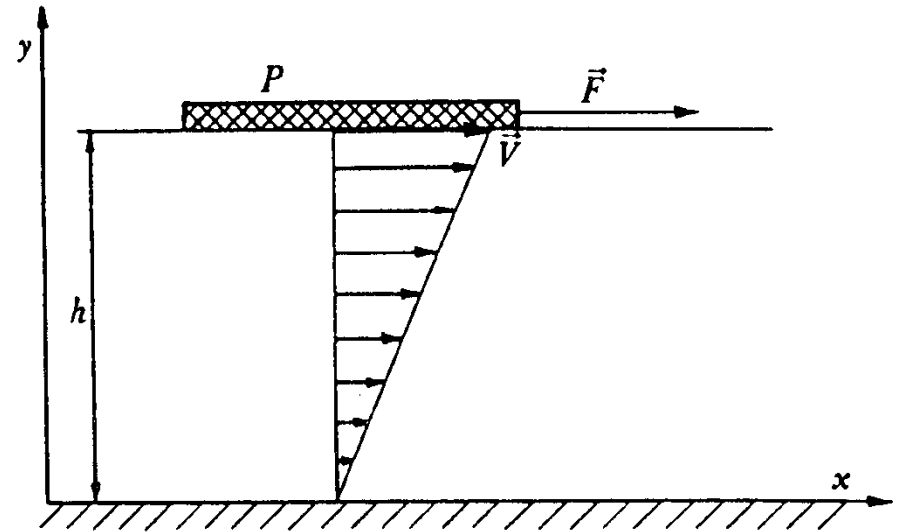
# Forze viscosive

$$\bar{F} = \mu \frac{\bar{v}A}{h}$$

con  $\mu$  = viscosità dinamica

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{v}{h}$$

in generale  $\rightarrow \tau = \mu \frac{du}{dy}$



unità di misura:

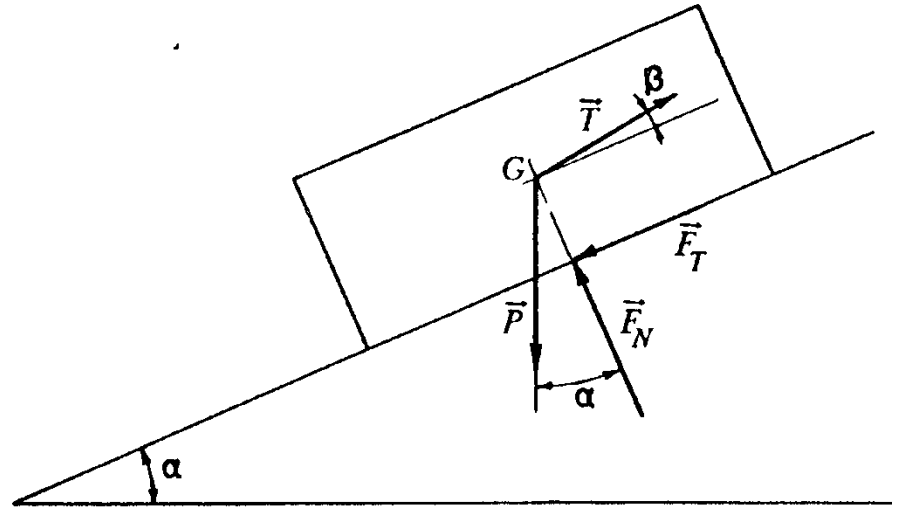
$$[\mu] = \frac{\text{massa}}{\text{lunghezza} \times \text{tempo}}$$

$$1 \cdot [\mu]_{CGS} = 1 \cdot \frac{\text{g}}{\text{cm} \times \text{s}} = 1 \text{ Poise (P)}$$

# Piano Inclinato (inclined plane)

1° caso: corpo di peso  $\mathbf{P}$  in quiete

$$\begin{cases} T \cdot \cos\beta - P \cdot \sin\alpha = F_T \\ T \cdot \sin\beta - P \cdot \cos\alpha = -F_N \end{cases}$$



condizione di aderenza:  
adherence condition:

$$\left| \frac{F_T}{F_N} \right| \leq f_a \quad \rightarrow \quad \left| \frac{T \cdot \cos\beta - P \cdot \sin\alpha}{-T \cdot \sin\beta + P \cdot \cos\alpha} \right| \leq f_a$$

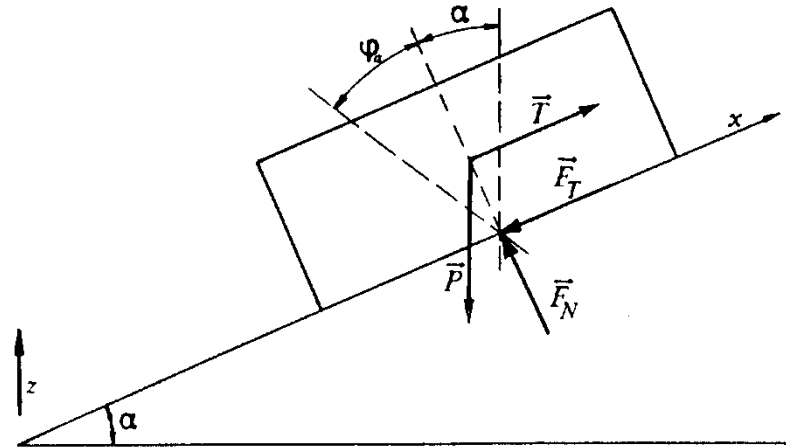
# Piano Inclinato

1° caso: corpo di peso  $\mathbf{P}$  in quiete  $\bar{\mathbf{T}} \parallel$  piano

$$\beta=0; \quad T > P \cdot \sin \alpha$$

$$T - P \cdot \sin \alpha \leq f_a P \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{T}{P} \leq \frac{\sin(\alpha + \varphi_a)}{\cos \varphi_a}$$



$$\beta=0; \quad T < P \cdot \sin \alpha$$

$$T=0$$

$$-f_a \leq \frac{T - P \cdot \sin \alpha}{P \cdot \cos \alpha} \quad \frac{T}{P} \geq \frac{\sin(\alpha - \varphi_a)}{\cos \varphi_a}$$

$$\sin(\alpha - \varphi_a) \leq 0 \rightarrow \alpha \leq \varphi_a$$

# Piano Inclinato

2° caso: moto uniforme (uniform motion)

$$\begin{cases} T \cdot \cos\beta - P \cdot \sin\alpha - F_T = 0 \\ T \cdot \sin\beta - P \cdot \cos\alpha + F_N = 0 \end{cases}$$

$$\frac{F_T}{F_N} = f = Tg \varphi \rightarrow T = P \cdot \frac{f \cdot \cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\beta + f \cdot \sin\beta} = P \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\varphi - \beta)}$$

# Piano Inclinato

**3° caso:** **T** orizzontale per mantenere il corpo fermo  
(T horizontal, to keep the body still)

$$\rightarrow \beta = -\alpha \quad -f_a \leq \frac{T \cdot \cos\beta - P \cdot \sin\alpha}{P \cdot \cos\alpha + T \cdot \sin\beta} \leq f_a$$

se  $T \cdot \cos\alpha > P \cdot \sin\alpha$ :  $\frac{T}{P} \leq \text{Tg}(\alpha + \varphi_a)$

se **T** é diretta in verso opposto la nuova condizione di aderenza é data:  
(for T in the opposite direction, you have: )

$$\frac{T}{P} \leq \text{Tg}(\varphi_a - \alpha)$$

**4° caso:** **T** necessaria per mantenere il corpo in moto uniforme  
(to maintain the body in uniform motion)

$$\begin{cases} \frac{T}{P} = \text{Tg}(\alpha + \varphi) & \text{(in salita)} & \text{uphill} \\ \frac{T}{P} = \text{Tg}(\varphi - \alpha) & \text{(in discesa)} & \text{downhill} \end{cases}$$