VIBRAZIONI MECCANICHE

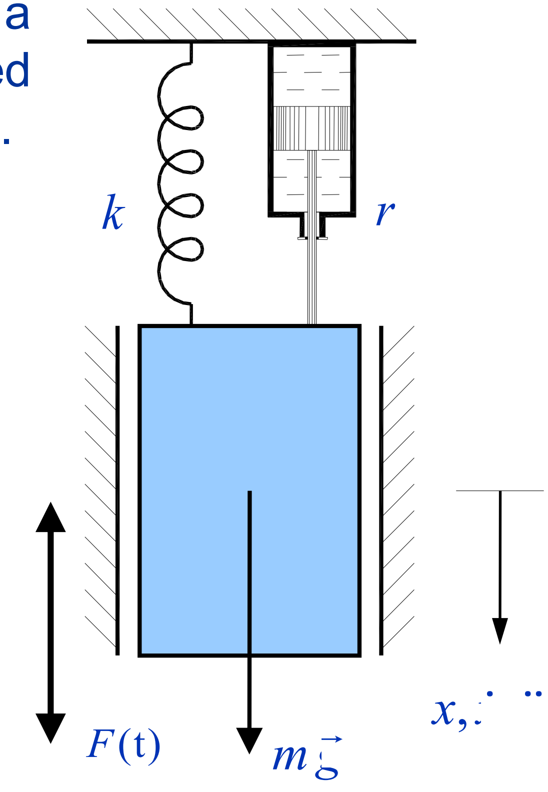
Sistemi vibranti ad un grado di libertà

Oscillazioni forzate

Elementary forced oscillator

Now you want to analyze the dynamic behavior of a vibrating system such as the one previously studied also subject to an external forcing F (t) function of time.

- ***linear systems***
- ***superposition of effects***



Elementary forced oscillator

Generic function:

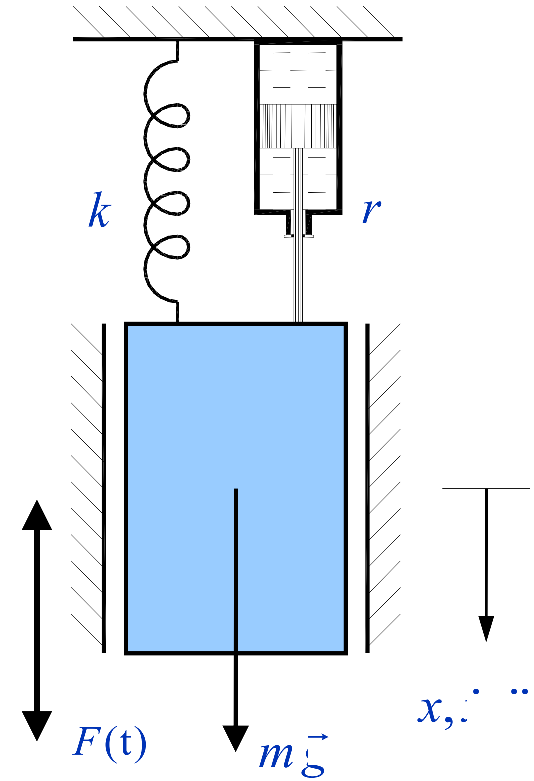
$F(\mathrm{t})$ define in $(-\tau, +\tau)$

it can be represented by the Fourier series:

$$F(\mathrm{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} F_{0i} \cos\left(n\pi \frac{\mathrm{t}}{\tau} + \varphi_i \right)$$

simpler:

$$F(\mathrm{t}) = F_{00} + F_{01}\cos\omega \mathrm{t} + F_{02}\cos(2\omega \mathrm{t} + \varphi_2) +$$
$$+\cdots \qquad \mathrm{os}(n\omega \mathrm{t} + \varphi_n)$$



We analyze the system shown schematically in the figure, excited by a harmonic forcing:

$$\boxed{F(\mathrm{t}) = F_0 \cos\Omega \mathrm{t}}$$

Elementary forced oscillator

The equation of dynamic equilibrium of the system, always starting from the condition of static equilibrium, it results::

$$F_0 \cos \Omega t - k\,x - r\,\dot{x} \qquad \ddot{}$$

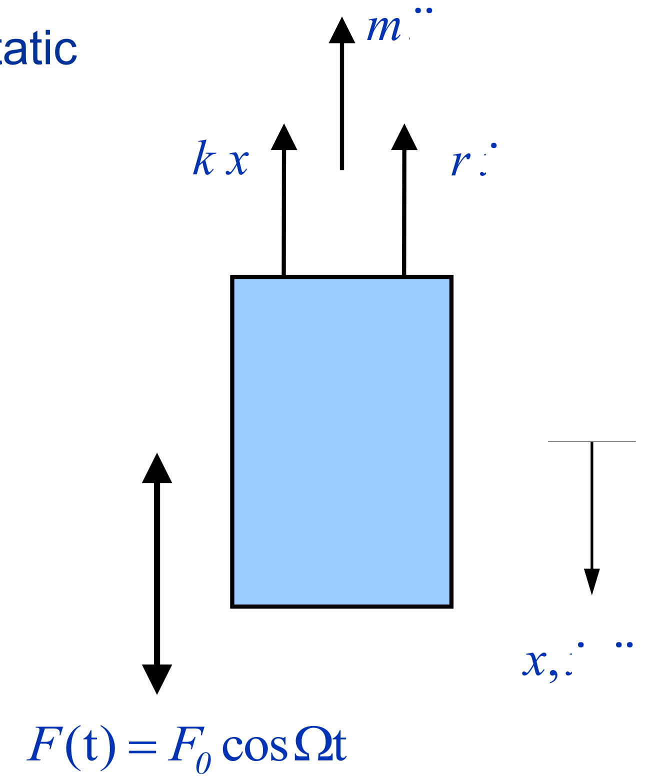
or:

$$m\,\ddot{x} \qquad \dot{} \qquad F_0 \cos \Omega t$$

and dividing all the members for the mass m:

$$\ddot{} \qquad \dot{} \qquad = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

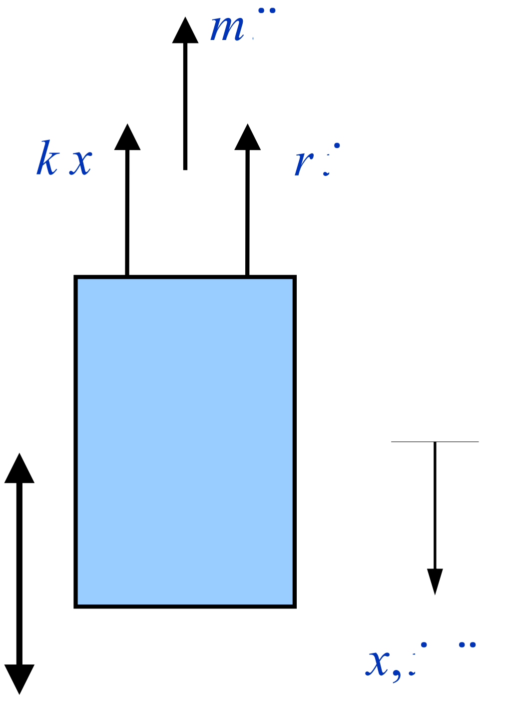
where: $\alpha = r/2m$ $\qquad \omega = \sqrt{k/m}$



Elementary forced oscillator

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

$$x_p(t) = H\cos(\Omega t - \psi)$$



$$F(t) = F_0 \cos\Omega t$$

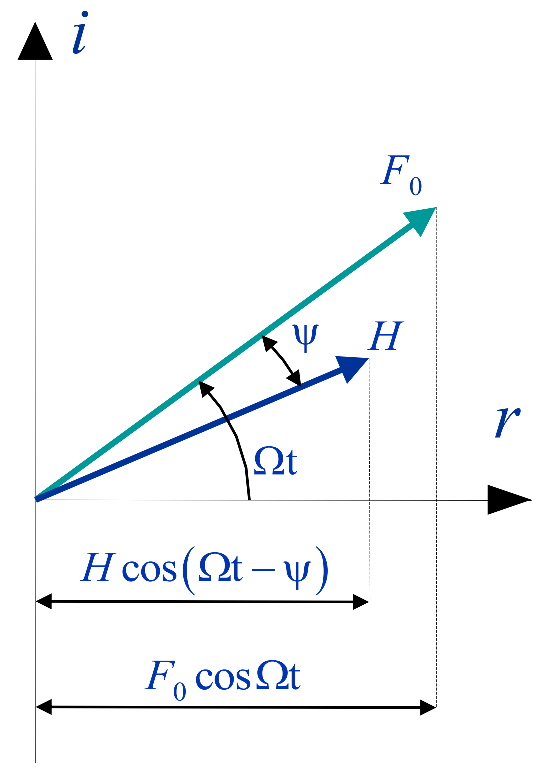
Elementary forced oscillator

Both the shift scheme x_p that the forcing F(t) F (t) can be represented in the plane of the Gauss-Argand (r;i), as vectors of amplitude H e F_0, , rotating with equal angular velocity Ω and phase shifted between them by an angle equal to ψ.

The integral x_p satisfies the equation of motion for the particular values of H e ψ:

$$\boxed{H = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \left(r\Omega\right)^2}}}$$

$$\boxed{tg\,\psi = \frac{r\Omega}{k - m\Omega^2}}$$



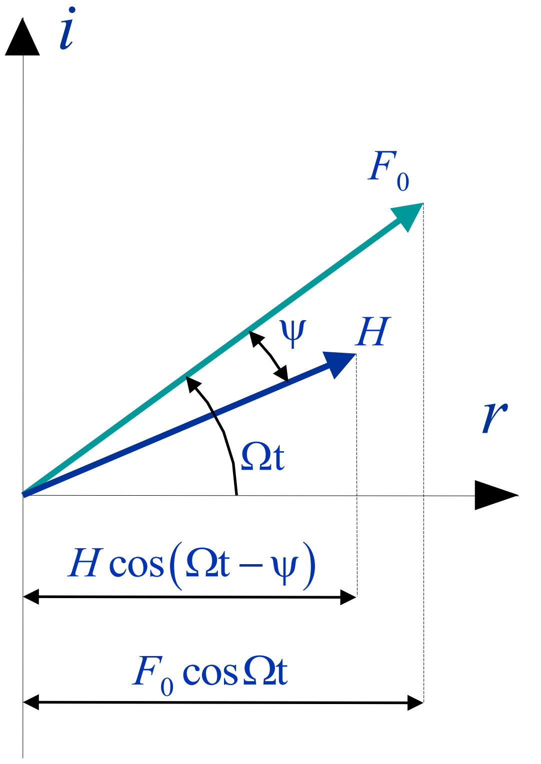
Elementary forced oscillator

Introducing the following reports:

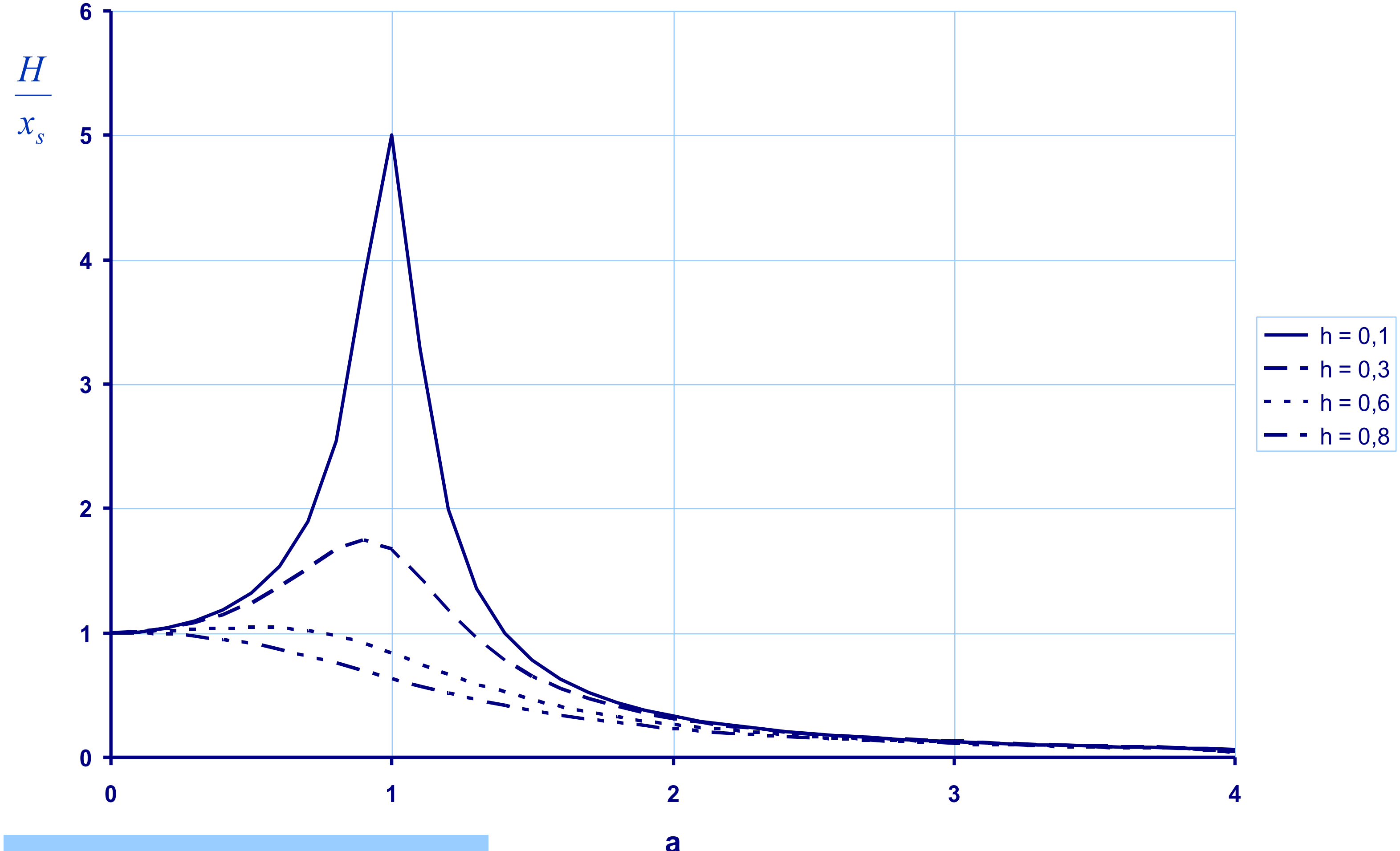
$$a = \frac{\Omega}{\omega} \qquad h = \frac{r}{r_c} \qquad x_s = \frac{F_0}{k}$$

$$\boxed{H = \frac{x_s}{\sqrt{\left(1-a^2\right)^2 + \left(2ah\right)^2}}}$$

$$\boxed{tg\,\psi = \frac{2ah}{1-a^2}}$$

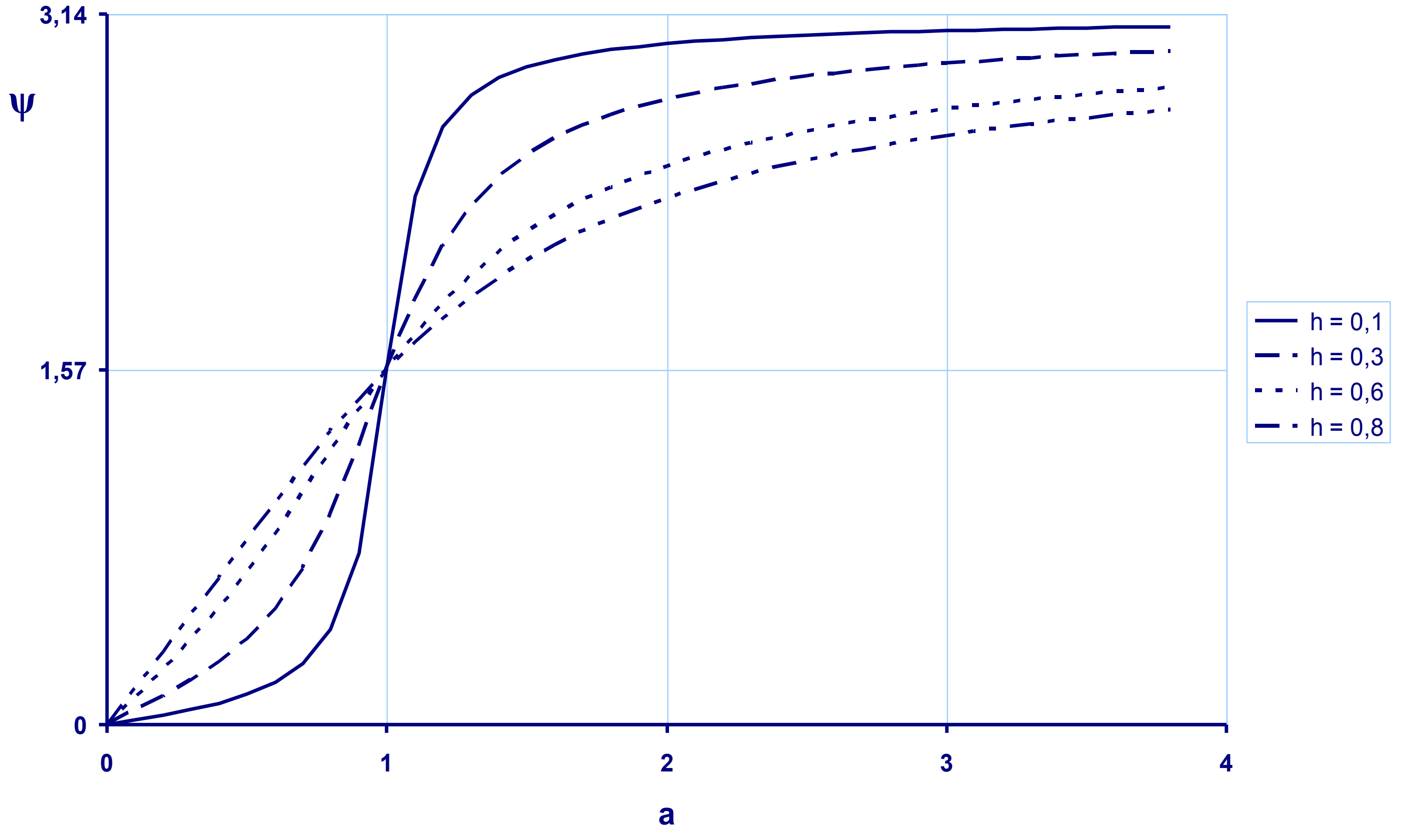


Elementary forced oscillator



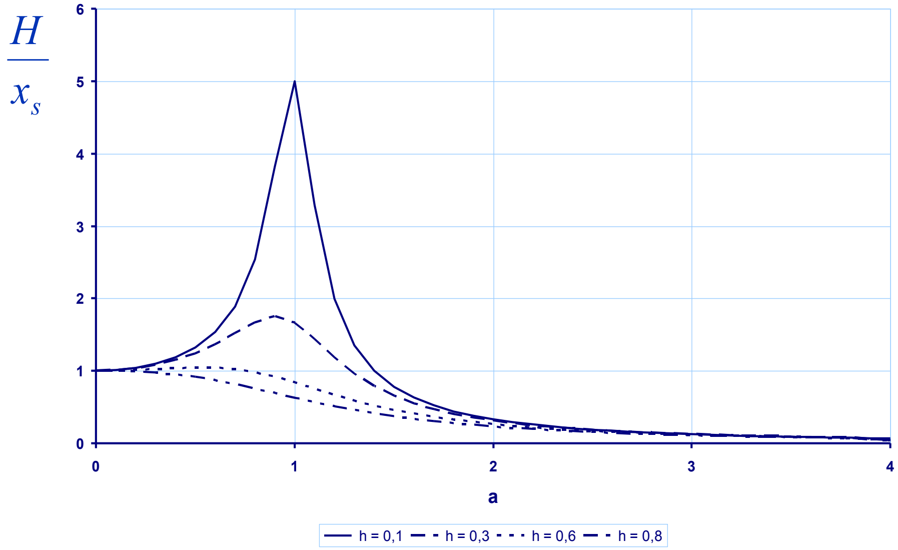
$\frac{H}{x_s}$ fattore di amplificazione

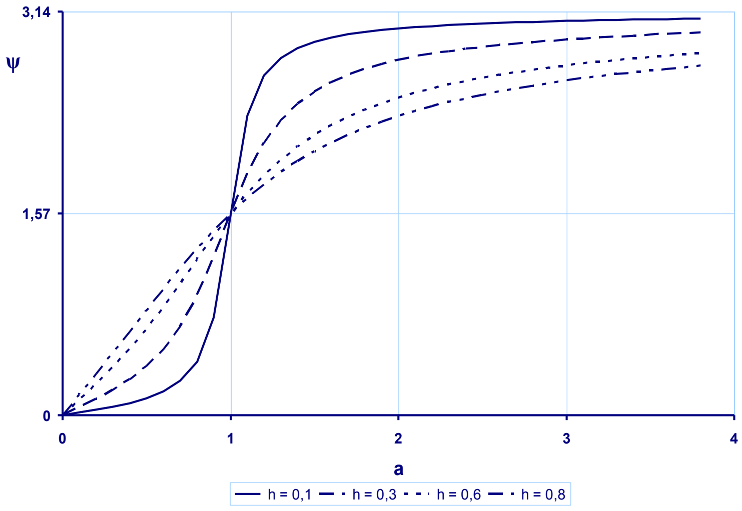
Oscillatore elementare forzato



Dall'analisi dei predetti diagrammi si nota come questi si possano dividere in tre zone fondamentali, alle quali corrispondono comportamenti della massa diversi tra di loro:

Oscillatore elementare forzato



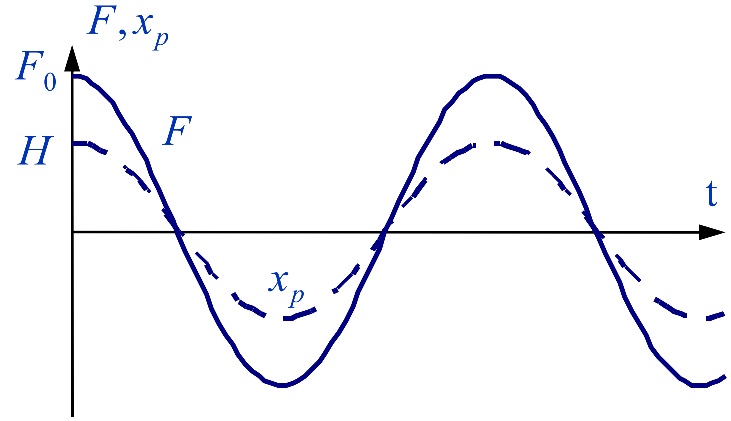


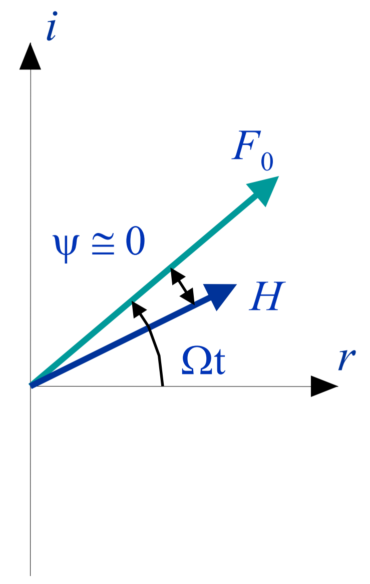
Oscillatore elementare forzato

1) $a \ll 1 \Rightarrow \Omega \ll \omega$

il 'fattore di amplificazione' è prossimo all'unità $\frac{H}{x_s} \cong 1$

l'angolo di fase tende a zero $\psi = 0$





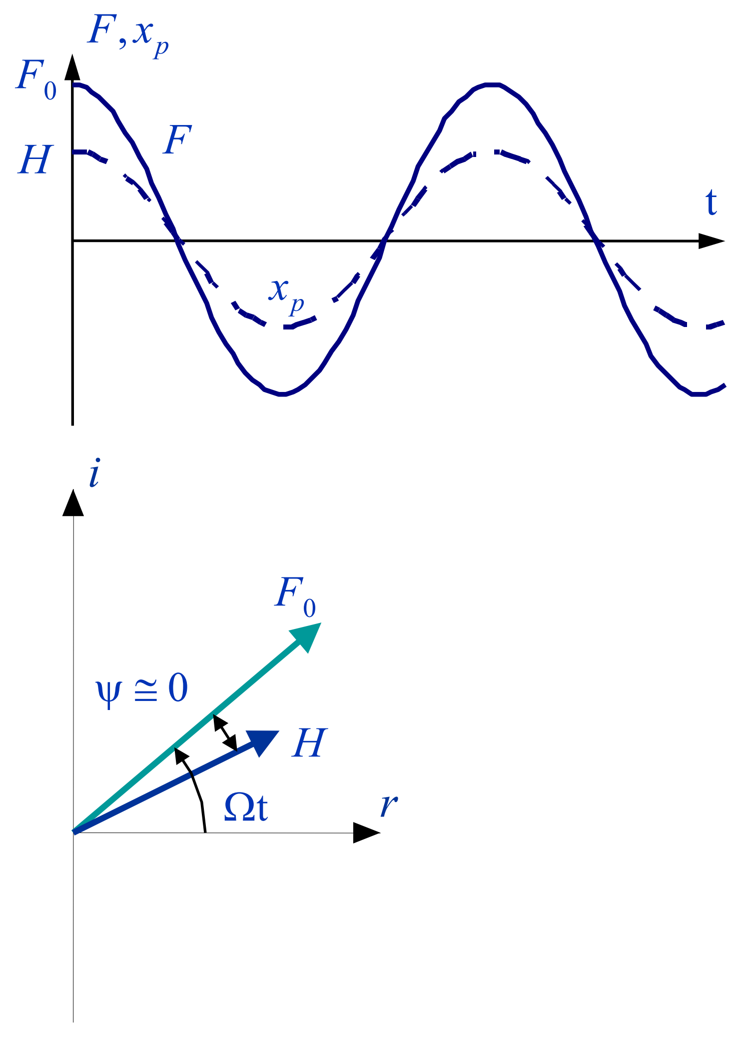
Cioè l'ampiezza della vibrazione forzata è quasi uguale allo spostamento che si avrebbe se una forzante di ampiezza F_0 fosse applicata staticamente (il sistema si comporta come se il collegamento fosse infinitamente rigido);

Oscillatore elementare forzato

1) $a \ll 1 \Rightarrow \Omega \ll \omega$

Lo spostamento risulta quasi in fase con la forzante aumentando il ritardo all'aumentare dello smorzamento del sistema.

Per il valore h = 0 (oscillatore non smorzato) forzante e spostamento risultano perfettamente in fase ($\psi = 0$).

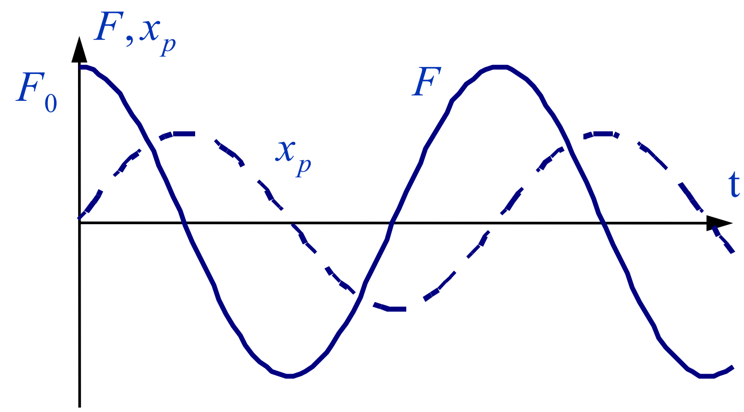


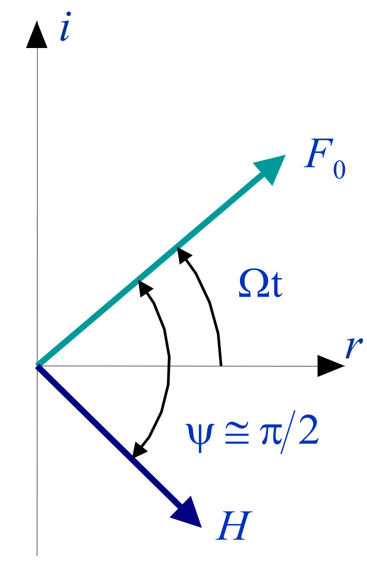
Oscillatore elementare forzato

2) a = 1 ⇒ Ω = ω

La pulsazione della forzante esterna eguaglia quella propria del sistema si dice che questo ultimo si trova in condizione di ‘risonanza’.

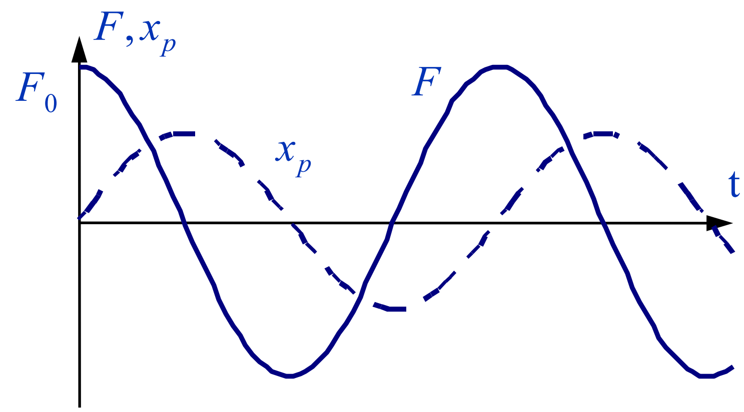
La forzante, anche se di modulo non elevato, provoca nel sistema oscillazioni rilevanti che aumentano al diminuire dello smorzamento (teoricamente per h = 0 il fattore di amplificazione tende all’infinito); è una condizione di funzionamento dannosa per il sistema e, quindi, da evitare.





Oscillatore elementare forzato

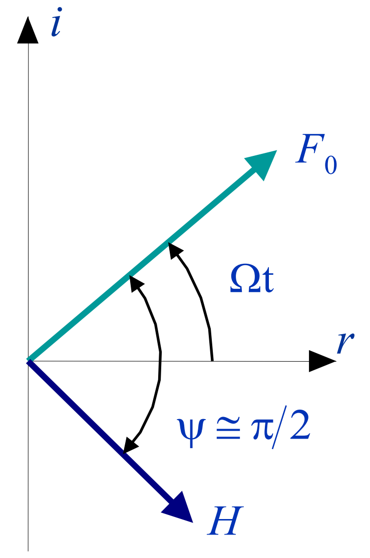
2) $a = 1 \Rightarrow \Omega = \omega$



L'angolo di fase vale sempre $\pi/2$ per qualsiasi valore dello smorzamento.

Quindi ad un massimo della forzante corrisponde uno spostamento nullo, e viceversa.

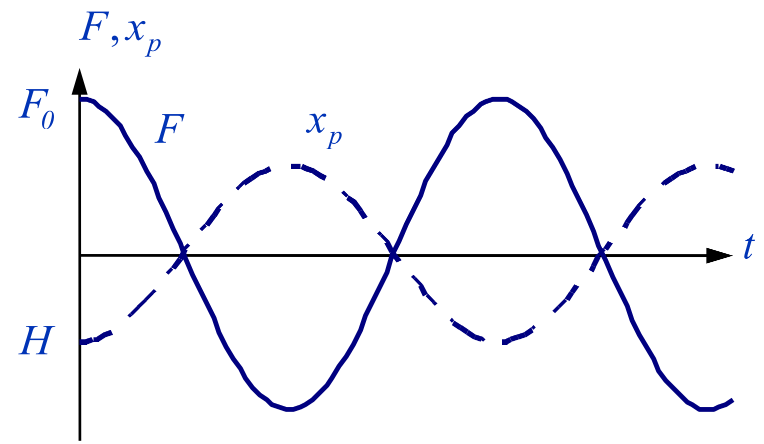
Lo spostamento viene definito in 'quadratura' con la forzante.

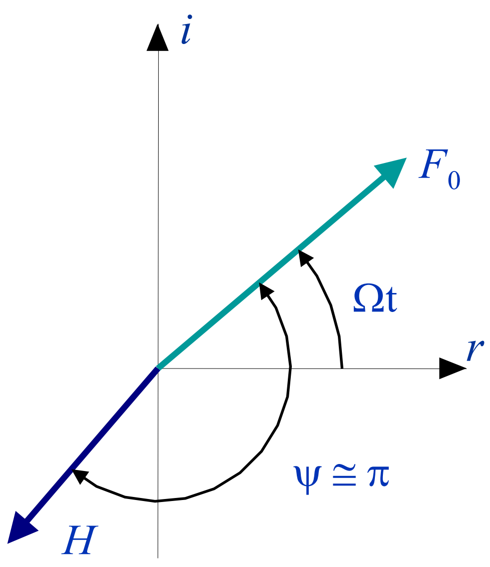


Oscillatore elementare forzato

3) $a \gg 1 \Rightarrow \Omega \gg \omega$

Gli spostamenti indotti sono sempre minori di quelli provocati nel caso statico e tendono a zero per pulsazione della forzante tendente all'infinito; l'angolo di fase, all'aumentare di a, si approssima a π tanto più quanto più è piccolo lo smorzamento (lo spostamento viene detto in 'controfase' rispetto alla forzante)





Oscillatore elementare forzato

Consideriamo l'integrale particolare e facciamone le derivate:

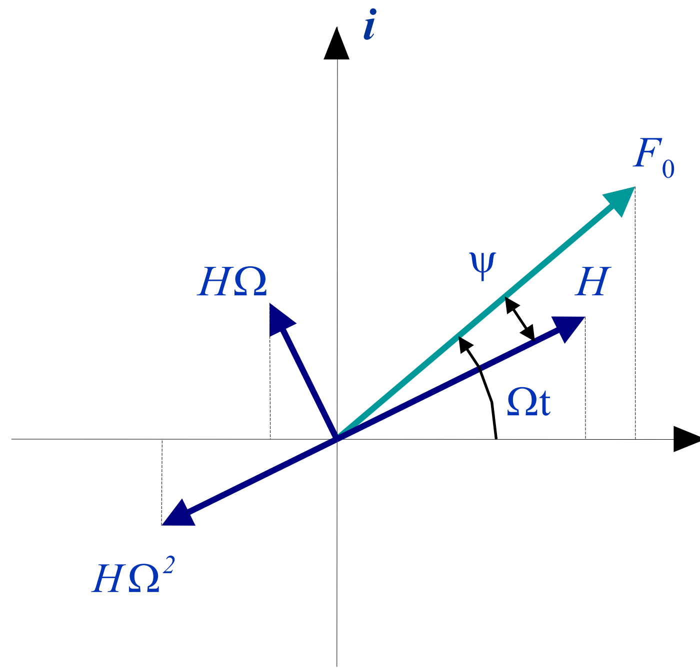
$$x_p(\mathrm{t}) = H\cos(\Omega\mathrm{t} - \psi)$$

$$v = \dot{x} \quad H\Omega\,\mathrm{sen}(\Omega\mathrm{t} - \psi) =$$

$$= H\Omega\cos\left(\Omega\mathrm{t} - \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = \ddot{x} \quad -H\Omega^2\cos(\Omega\mathrm{t} - \psi) =$$

$$= H\Omega^2\cos(\Omega\mathrm{t} - \psi + \pi)$$



nel piano (r,i) sono rappresentati sempre da vettori rotanti con velocità angolare Ω, il primo in anticipo di $\pi/2$ rispetto allo spostamento, il secondo, invece, in opposizione di fase.

Oscillatore elementare forzato

Analizziamo l'equilibrio dinamico del sistema considerando i vettori rotanti nel piano di Gauss.

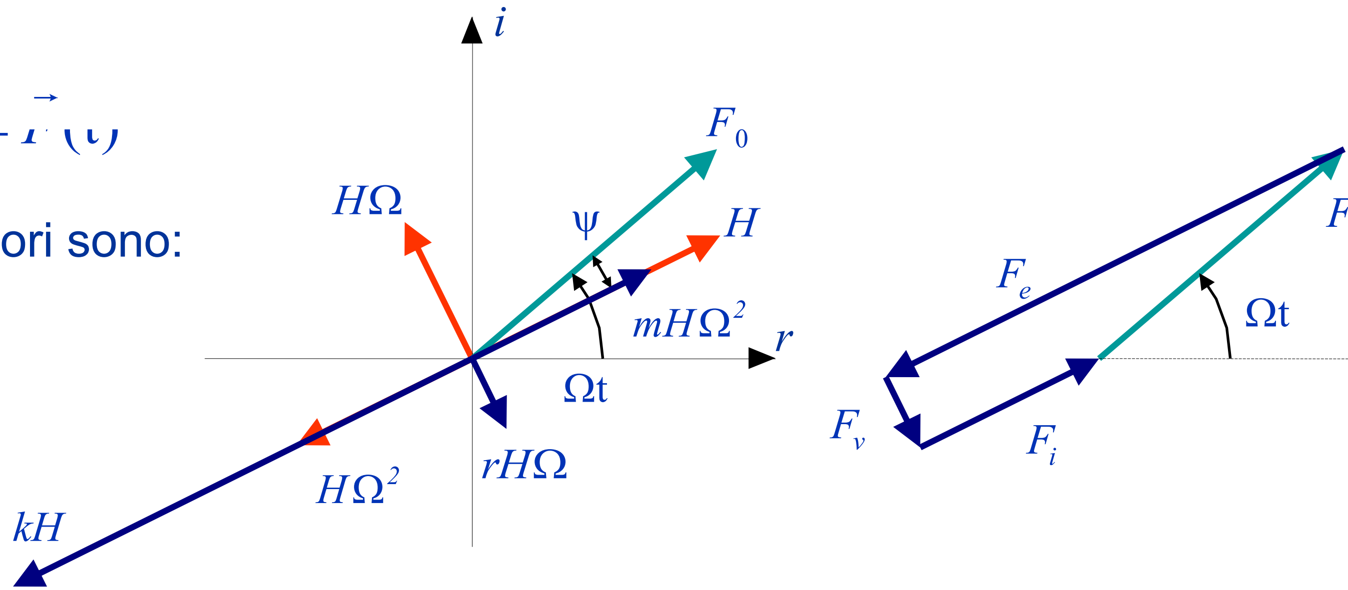
$$\vec{F}_i + \vec{F}_v + \vec{F}_e = \vec{F}(t)$$

I moduli dei vettori sono:

$$\left|\vec{F}_i\right| = mH\Omega^2$$

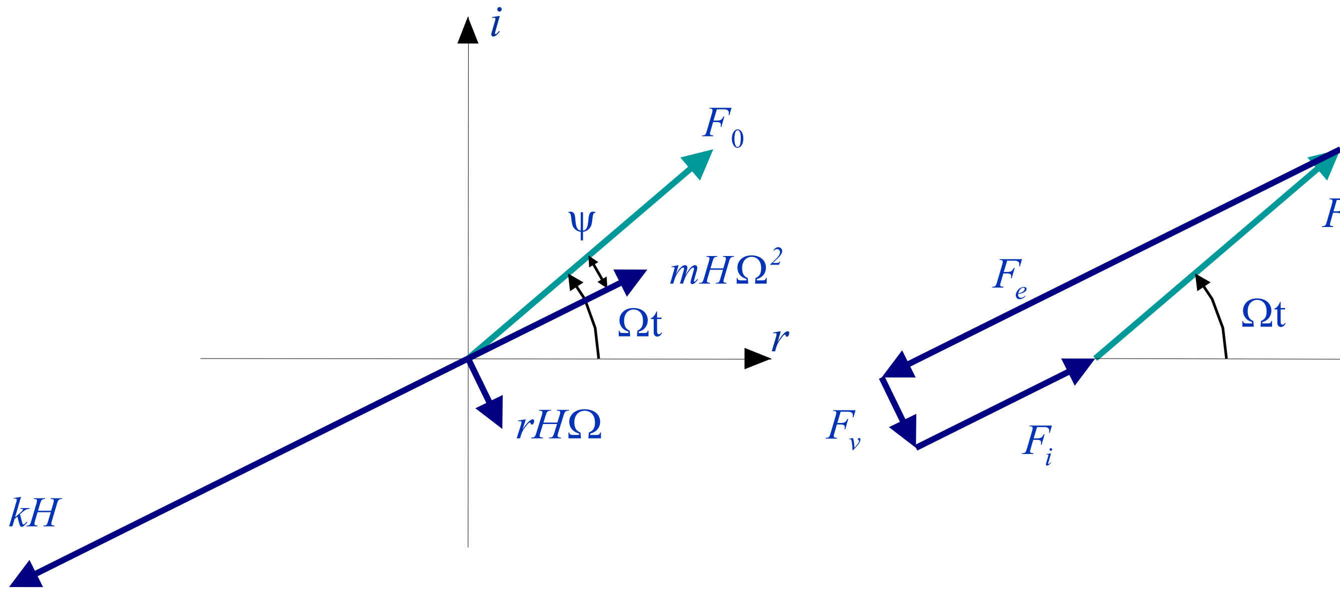
$$\left|\vec{F}_v\right| = rH\Omega$$

$$\left|\vec{F}_e\right| = kH$$



dove il primo vettore è diretto in verso opposto all'accelerazione, e, pertanto, concorde con lo spostamento; il secondo è diretto in verso opposto alla velocità; il terzo opposto allo spostamento.

Oscillatore elementare forzato



Per l'equilibrio dei vettori rotanti si ha:

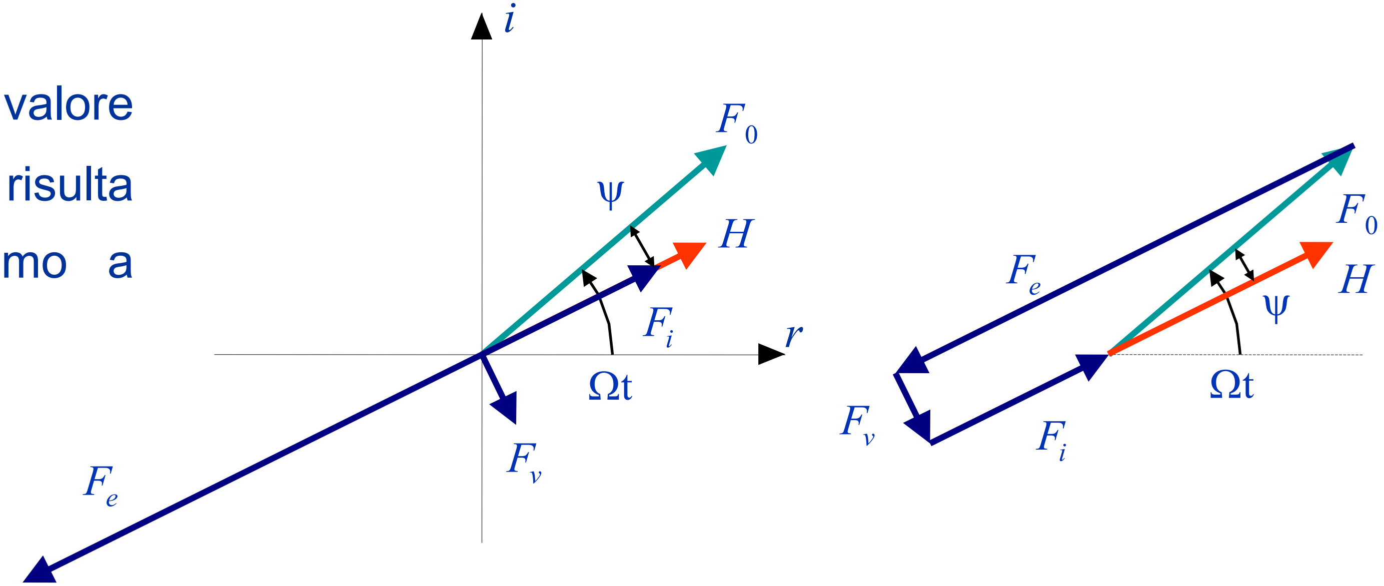
$$\left(kH - mH\Omega^2\right)^2 + \left(rH\Omega\right)^2 = F_0^2$$

$$\boxed{H = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \left(r\Omega\right)^2}}}$$

Oscillatore elementare forzato

1) a ≪ 1 ⇒ Ω ≪ ω

Per qualsiasi valore di h l'angolo ψ risulta sempre prossimo a zero.

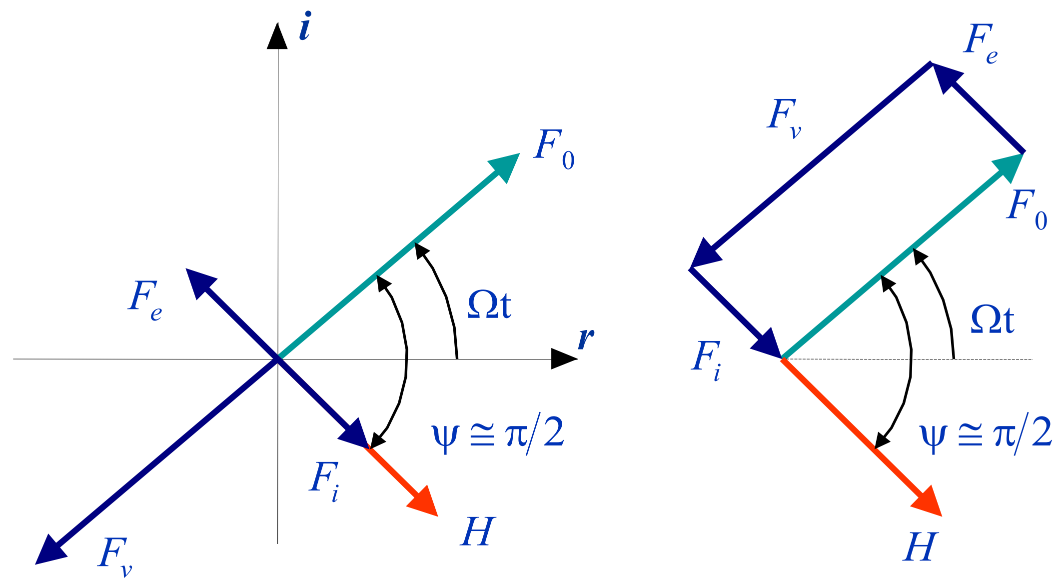


Essendo l'ampiezza della forza d'inerzia e di quella elastica funzioni di Ω, esse risulteranno di minima intensità: pertanto, la forzante esterna è quasi esclusivamente equilibrata dalla forza elastica, che si oppone anche alla forza d'inerzia.

Oscillatore elementare forzato

2) a = 1 ⇒ $\Omega = \omega$

Essendo $\psi = \pi/2$, la forzante esterna viene totalmente equilibrata dalla forza viscosa, qualunque sia il valore dello smorzamento del sistema.

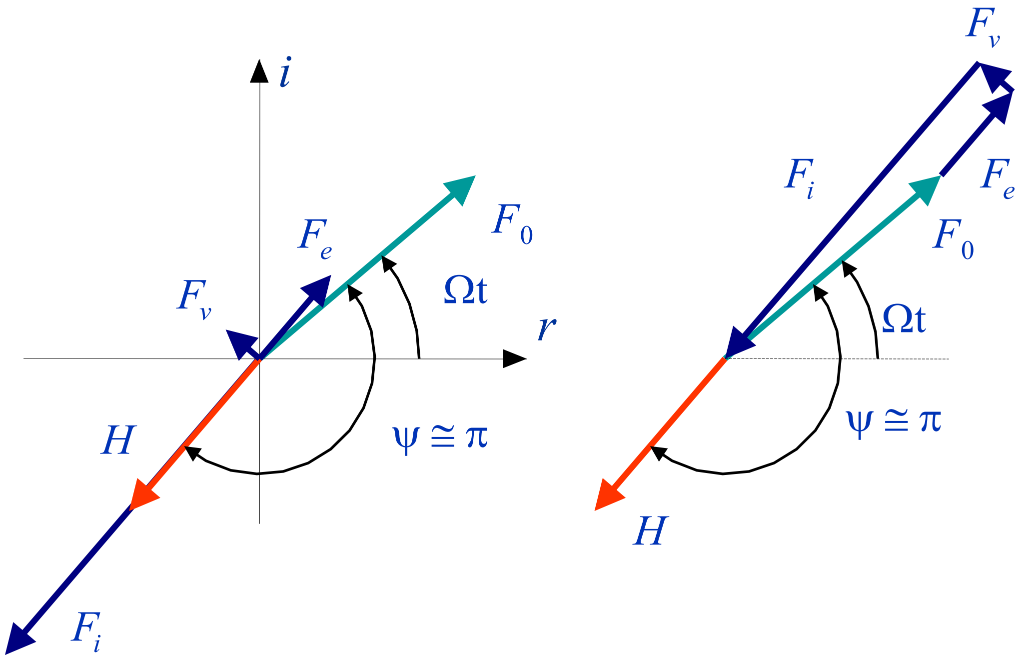


La forza elastica e quella d’inerzia si equilibrano tra di loro.

Oscillatore elementare forzato

3) $a \gg 1 \Rightarrow \Omega \gg \omega$

l'angolo di fase ψ risulta sempre prossimo a π; il valore di Ω è grande e, pertanto, la forza d'inerzia, dipendendo da Ω^2, assume intensità elevate;



essa è quasi in opposizione di fase con la forzante e provvede ad equilibrarla, insieme con la forza elastica che agisce pressoché in concordanza con la forzante.

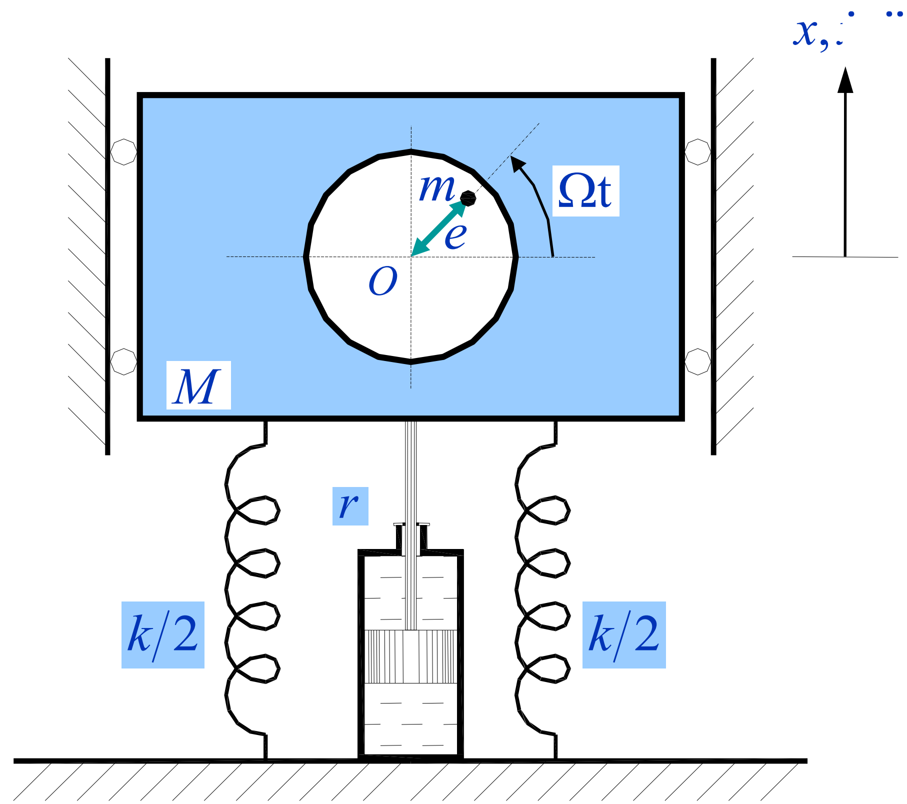
Esempio

L'insorgere di forzanti variabili periodicamente è facilmente riscontrabile nel caso di presenza di macchine alternative (motori combustione interna, pompe o compressori alternativi) o di rotori (motori o generatori elettrici, turbine, pompe o compressori fluidodinamici).

Nel primo caso la forza eccitatrice può essere identificata con la forza d'inerzia generata dalle masse dotate di moto alternativo: nel secondo caso è la non perfetta bilanciatura dinamica del rotore a generare una forza d'inerzia rotante, la cui componente verticale risulta una forza pulsante.

Esempio

Consideriamo lo schema riportato nella figura, dove la macchina, non equilibrata, viene schematizzata con la sua massa M, soggetta all'azione di una massa eccentrica m rotante, intorno allo stesso asse O, con un'eccentricità *e* ed alla medesima velocità angolare Ω del rotore.



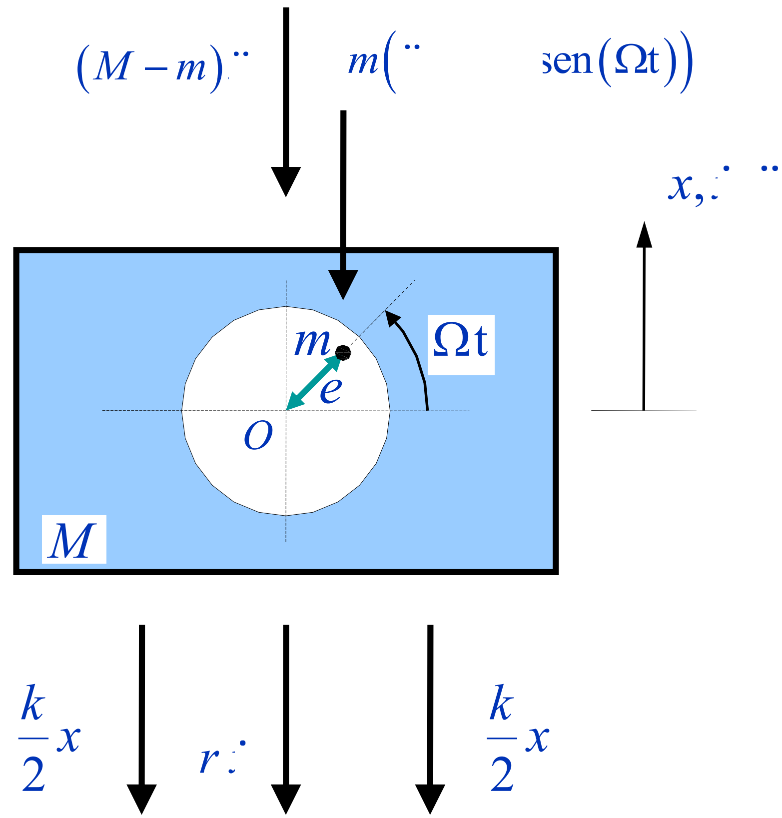
Esempio

Lo spostamento verticale della massa m vale:

$$x_m = x + e\,\mathrm{sen}(\Omega t)$$

dove x rappresenta il moto della massa supportata elasticamente.

Se M rappresenta la massa totale del sistema, comprensiva di m, l'equazione del moto del sistema è:

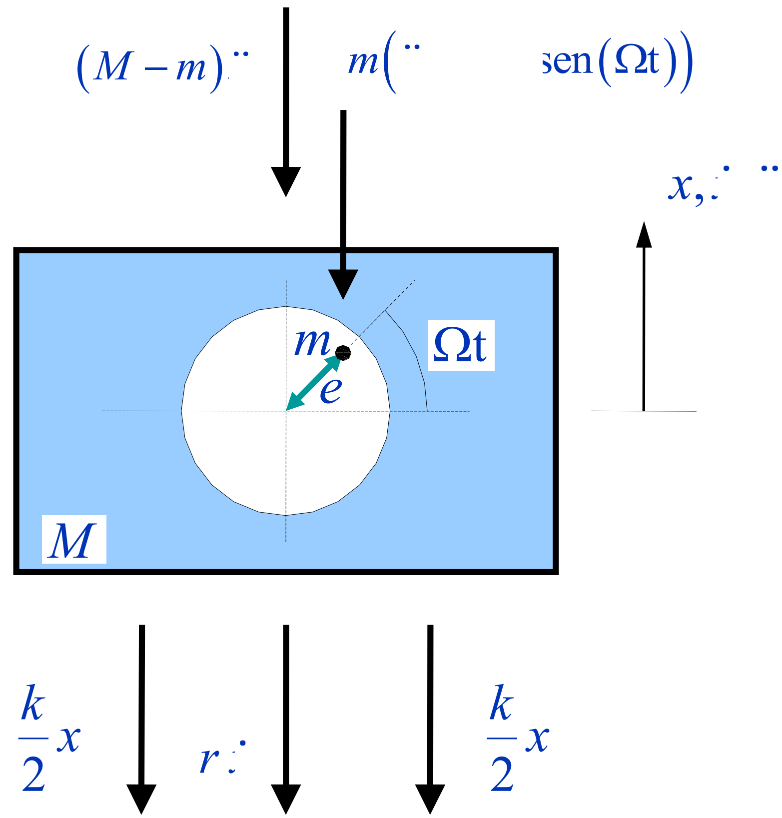


$$-k\,x - r \;\cdots\; + e\,\mathrm{sen}(\Omega t)\big)$$

$$-k\,x - r \;\cdots\; (\Omega t)\big)$$

Esempio

$$M\,\ddot{}\qquad\dot{}\qquad\left(m\Omega^2 e\right)\mathrm{sen}\left(\Omega t\right)$$



risulta, cioè, un'equazione formalmente analoga a quella del moto ricavata per l’oscillatore elementare forzato da una forzante armonica, con ampiezza:

$$F_0 = m\Omega^2 e$$

tale equazione ammette soluzioni dello stesso tipo di quelle già ricavate.

Esempio

$$H = \frac{m\Omega^2 e}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + (r\Omega)^2}}$$

$$tg\,\psi = \frac{r\Omega}{k - m\Omega^2}$$

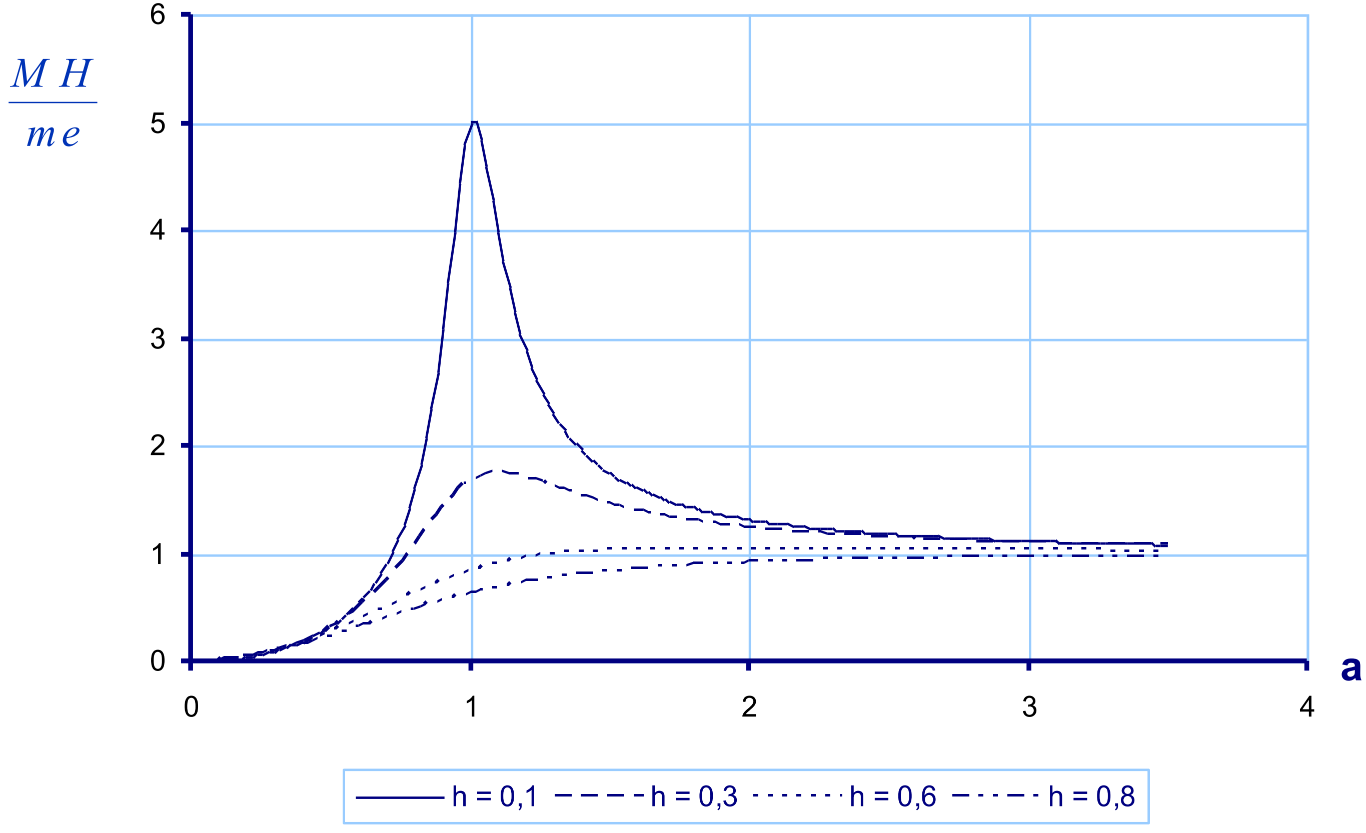
in termini adimensionali:

$$H = \frac{\frac{m}{M} e a^2}{\sqrt{\left(1 - a^2\right)^2 + (2ah)^2}}$$

$$tg\,\psi = \frac{2ah}{1 - a^2}$$

Esempio

il che permette di riportare il termine $\dfrac{M\,H}{m\,e}$ in funzione del rapporto a, per vari valori di h.

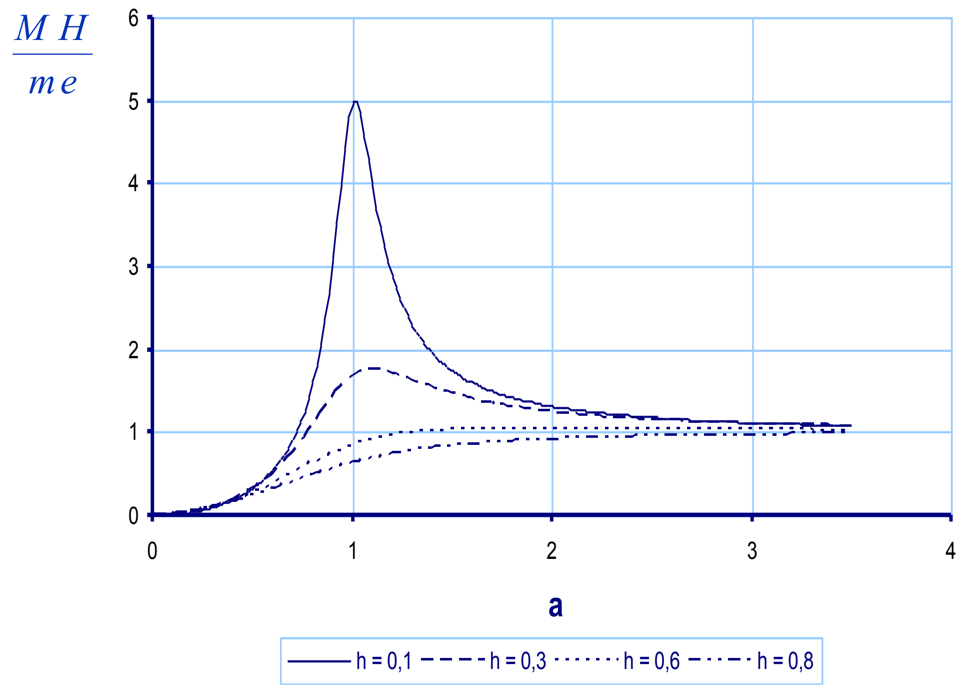


Esempio

per bassi regimi di rotazione Ω della macchina, a $\ll$ 1, l'ampiezza della forza eccitatrice $me\Omega^2$ è molto piccola e tutte le curve partono dal valore zero.

Per a=1 si ha: $$\frac{MH}{me} = \frac{1}{2h}$$

è proprio la presenza dello smorzatore a limitare il picco della curva



Per a $\gg$ 1 $\Rightarrow$ $$\frac{MH}{me} \rightarrow 1$$

la massa (M - m) ha un'ampiezza di oscillazione $H = me/M$ sfasata, rispetto alla posizione di m, di 180°.