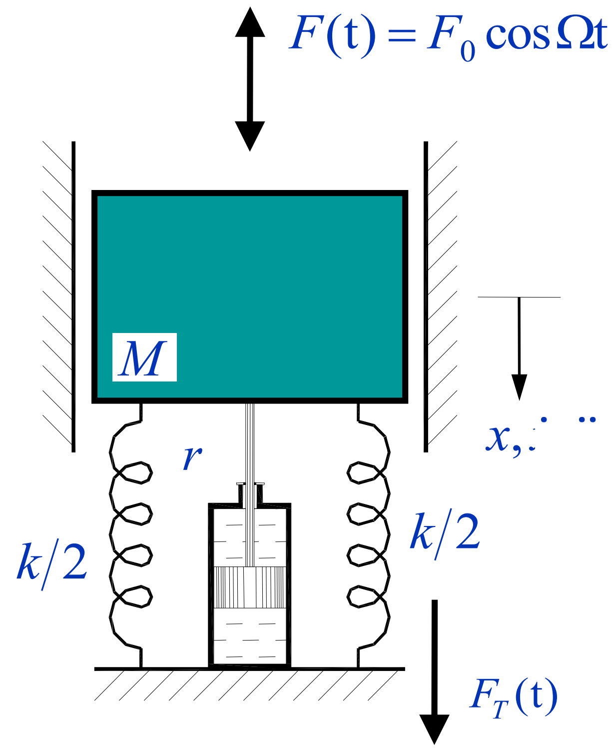
VIBRAZIONI MECCANICHE

Sistemi vibranti ad un grado di libertà

Oscillazioni forzate - Applicazioni

Fondazioni

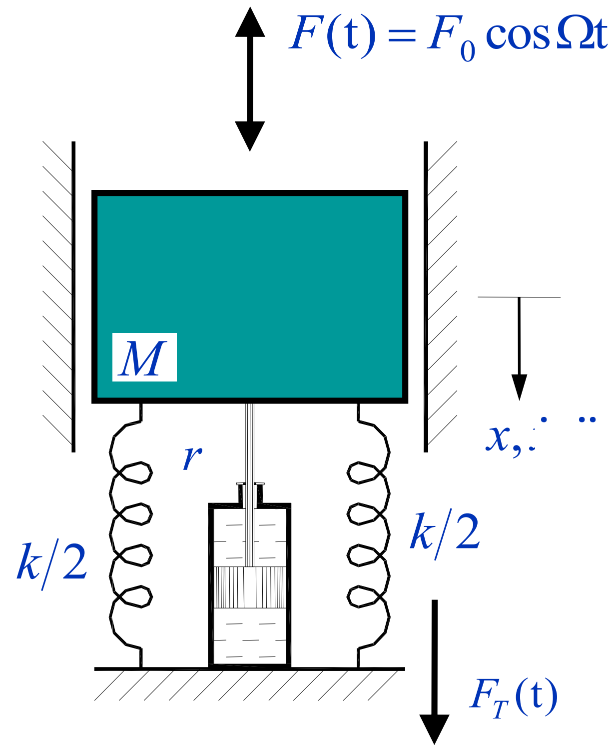
Consideriamo le forze che le macchine, durante il loro normale funzionamento, trasmettono alle fondazioni e, dalle fondazioni, al terreno.



Questo studio è finalizzato al corretto dimensionamento delle fondazioni di una macchina, dimensionamento che deve anche tener conto dell'eventuale presenza di altre macchine, o di altre strutture, nelle vicinanze della prima e della eventuale loro interazione dinamica.

Fondazioni

Il problema dell'isolamento delle vibrazioni riveste grande importanza pratica sia nell'installazione di macchine non perfettamente equilibrate, per limitare le sollecitazioni trasmesse alla struttura di sostegno, sia quando si voglia mantenere in condizioni di quasi quiete un corpo quando la struttura di sostegno è animata da moto oscillatorio.

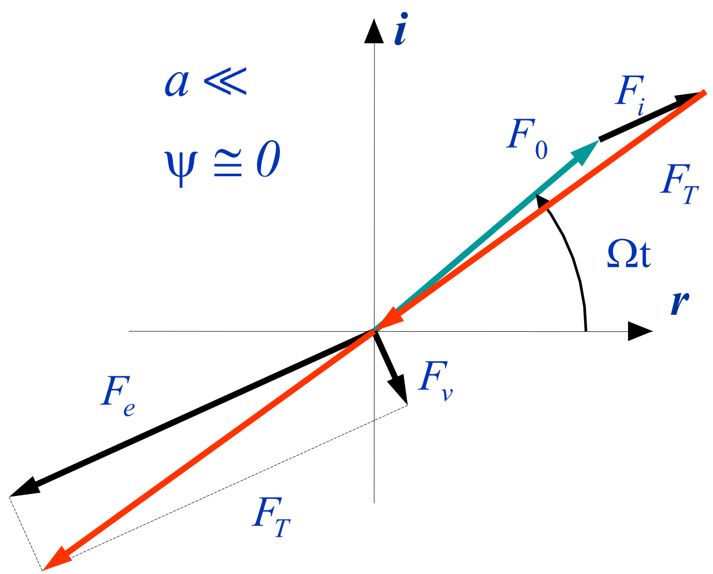


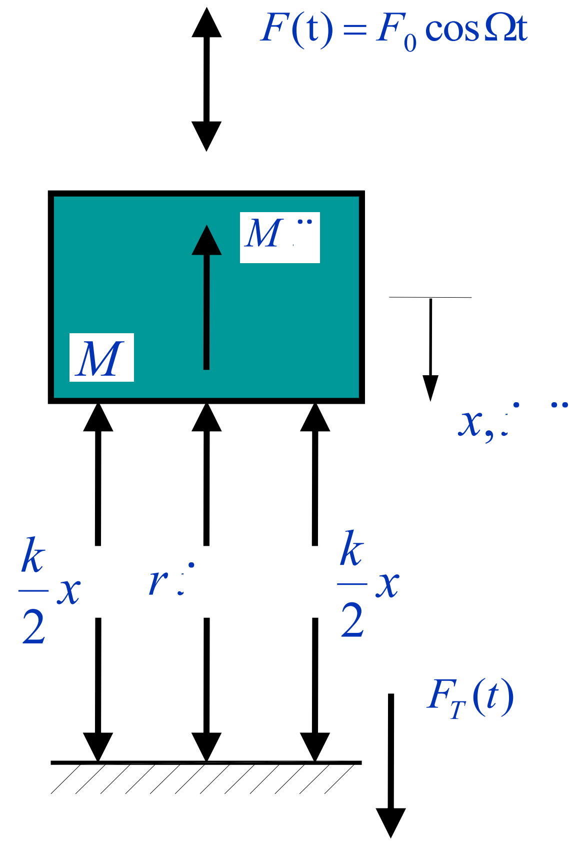
Allo scopo consideriamo lo schema riportato in figura, in cui è schematizzato un sistema vibrante forzato da una generica forzante armonica del tipo:

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t$$

Fondazioni

La forza trasmessa al vincolo, F_T, risulta, ovviamente, somma sia della forza elastica F_e che di quella viscosa F_v, entrambe rappresentate, nel piano $(i;r)$, da vettori rotanti con uguale velocità angolare Ω.

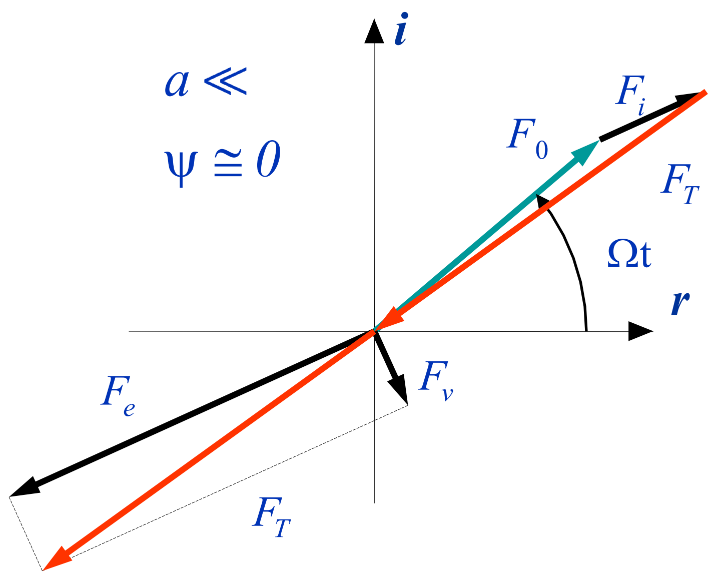




Fondazioni

E' ovvio che anche la F_T ruota con velocità Ω, cioè ha la stessa pulsazione della forzante, ed il suo modulo vale:

$$\left|F_T\right| = \sqrt{\left|F_e\right|^2 + \left|F_v\right|^2} = \sqrt{(kH)^2 + (r\Omega H)^2} = kH\sqrt{1 + \frac{(r\Omega)^2}{k^2}}$$



in termini adimensionali:

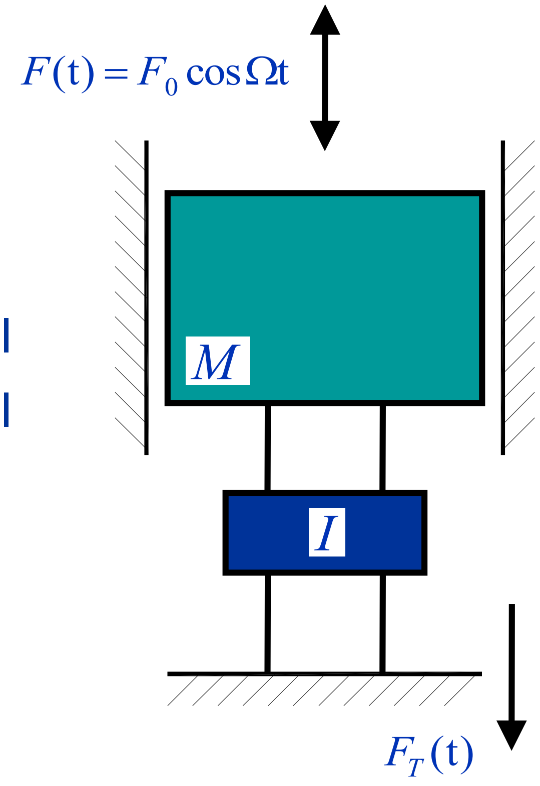
$$\left|F_T\right| = kH\sqrt{1 + (2ha)^2}$$

Fondazioni

Se si raggruppano l'elemento elastico e quello smorzante della fondazione in unico elemento, detto 'isolatore' si ottiene lo schema semplificato di figura.

Tenendo conto della ampiezza della risposta:

$$H = \frac{x_s}{\sqrt{\left(1-a^2\right)^2 + \left(2a\,h\right)^2}}$$



definiamo ***coefficiente di trasmissibilità assoluta*** il rapporto tra il modulo della forzante trasmessa al vincolo e l'ampiezza della forzante esterna:

$$\boxed{t_a = \frac{\left|F_T\right|}{F_0} = \sqrt{\frac{1+\left(2a\,h\right)^2}{\left(1-a^2\right)^2 + \left(2a\,h\right)^2}}}$$

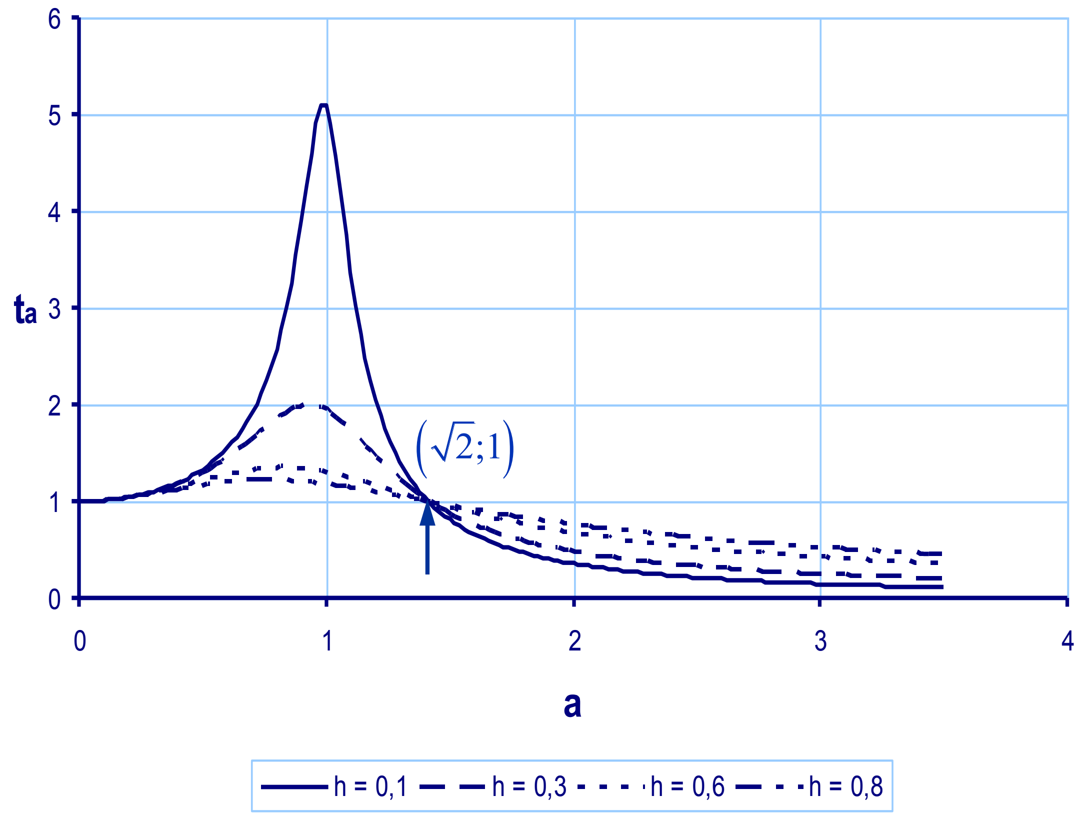
che viene diagrammato in funzione del rapporto a e al variare del rapporto h.

Fondazioni

Analizzando il diagramma si vede che tutte le curve, qualunque sia il valore dello smorzamento, passano per i due punti di coordinate (0,1) e ($\sqrt{2}$,1).

Anche questo diagramma, come i precedenti, può essere pensato diviso in tre zone caratteristiche.

Per **a** ≪ **1**, il valore di t_a è prossimo ad uno, pertanto la forza trasmessa al vincolo coincide quasi con la forzante esterna: il comportamento del sistema è quasi statico.

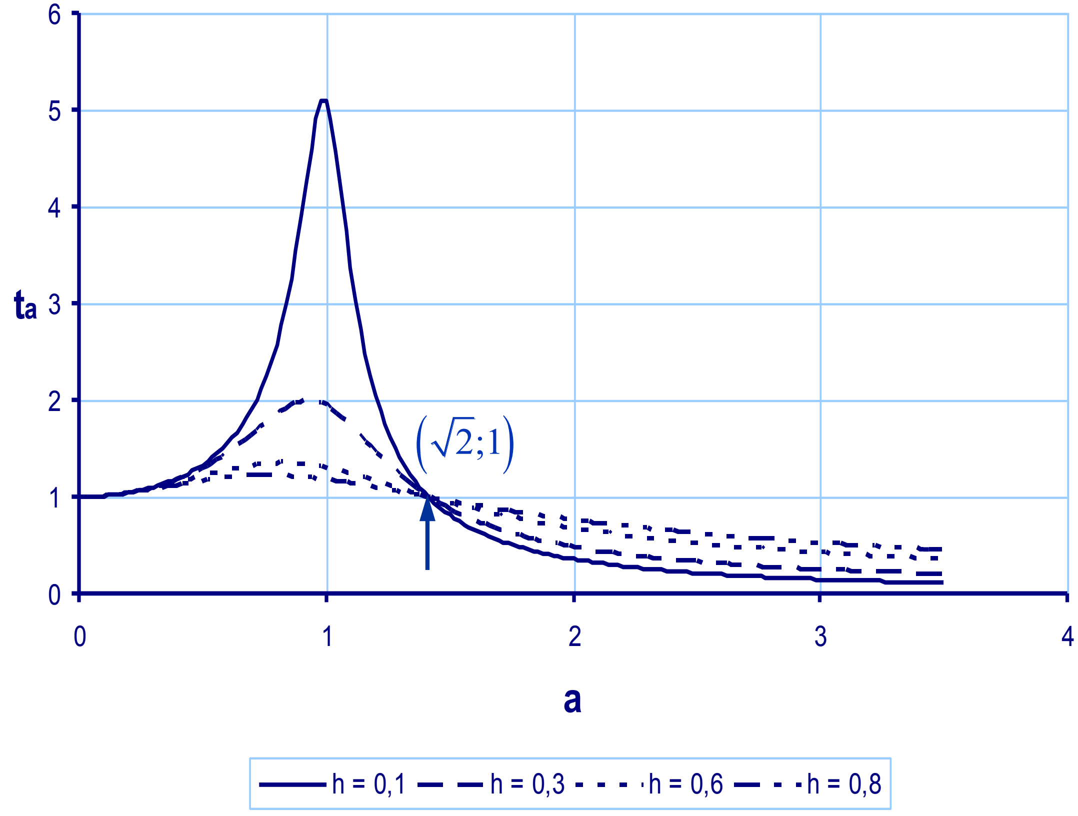


Fondazioni

Per **a=1** si ha '***risonanza***' la forza trasmessa al vincolo è molto più grande della forzante, si ha, cioè, una vera amplificazione della forzante, tanto maggiore quanto minore è il valore di h.

Per **a ≫ 1** si ha una notevole attenuazione della forzante che è quasi completamente equilibrata dalla forza d'inerzia.

Contrariamente a quanto avviene per valori di a<√2 l'attenuazione è minore per più elevati valori dello smorzamento.



Fondazioni

Fondazione rigida ($a \ll 1$, $\Omega \ll \omega$)

Essendo la frequenza propria del sistema decisamente superiore a quella della forzante, questa viene equilibrata quasi esclusivamente dalla reazione elastica e trasferita, anche ampliata, al vincolo.

Si ottiene in pratica tale tipologia quando si vincola la macchina al blocco di fondazione che poggia direttamente, senza interposizione di elementi elastici, su un terreno duro come la roccia o simili.

Fondazioni

Fondazione rigida ($a \ll 1$, $\Omega \ll \omega$)

I **vantaggi** di tale tipo di fondazione risiedono nella facilità di realizzazione, e perciò basso costo, e nella piccola entità delle vibrazioni riscontrabili sulla macchina, stante la rigidezza molto elevata.

Lo **svantaggio** maggiore è quello di trasmettere al terreno tutta l'entità della forzante, che può essere anche ampliata, e che può interessare, attraverso il terreno stesso, macchine e strutture vicine.

Fondazioni

Fondazione sospesa ($a \gg \sqrt{2}$, $\Omega \gg \omega$)

bisogna vincolare la macchina alla struttura, o al terreno, mediante elementi elastici scelti in modo tale che la frequenza propria ω del sistema (macchina + blocco di fondazione + elementi isolanti) risulti notevolmente minore di quella della forzante Ω.

In questo caso il valore della forzante trasmessa al suolo è molto minore della forzante applicata alla macchina, che è quasi interamente equilibrata dalla forza d'inerzia.

Anche le ampiezze delle vibrazioni della macchina sono molto ridotte rispetto ai valori di deformazione statica del sistema di isolamento.

Fondazioni

Fondazione sospesa ($a \gg \sqrt{2}$, $\Omega \gg \omega$)

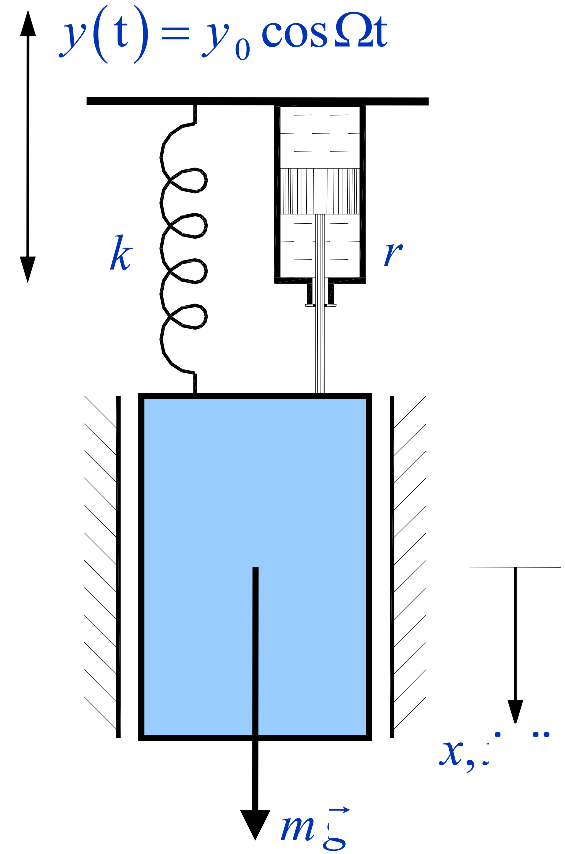
Lo ***svantaggio*** maggiore è rappresentato dal fatto che essendo, a regime, $\Omega \gg \omega$ nei transitori di avviamento e fermata della macchina si dovrà necessariamente attraversare il campo di *risonanza* del sistema, ingenerando notevoli vibrazioni che possono creare problemi nelle interconnessioni della macchina con altre attrezzature fisse (tubazioni per liquidi o aeriformi in pressione, ecc.).

Pertanto bisogna che nei *transitori* la velocità di risonanza sia attraversata abbastanza rapidamente in modo da evitare l'innesco di elevate vibrazioni.

L'impiego di smorzatori, posti in parallelo agli elementi elastici, consente, ovviamente, di limitare le massime ampiezze di vibrazione in risonanza, anche se il loro impiego risulta controproducente ai fini del contenimento delle forze trasmesse al terreno a regime.

Spostamento armonico del vincolo

Sino a questo punto si sono studiati moti di corpi che vibrano rispetto ad un telaio fisso, solidale, cioè, con il sistema di riferimento assoluto.



Consideriamo ora un sistema vibrante, costituito da massa, molla e smorzatore viscoso, in cui il vincolo sia mobile con una generica legge temporale.

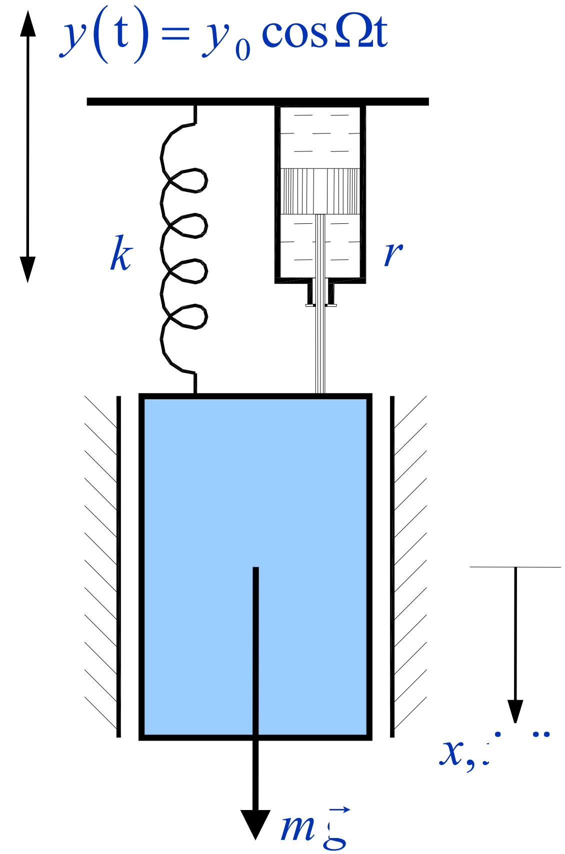
Studiando sistemi lineari, per i quali vale il principio di sovrapposizione degli effetti, si può considerare il vincolo dotato di semplice moto di tipo armonico

$$\boxed{y(t) = y_0 \cos \Omega t}$$

questa sarà una delle armoniche fondamentali dello sviluppo in serie, dell'effettivo moto del vincolo y(t).

Spostamento armonico del vincolo

A questo caso si potrà ricondurre sia il comportamento di un autoveicolo marciante su strada accidentata sia il caso di una qualsivoglia struttura interessata da una eccitazione sismica.



Definito con $x(t)$ lo spostamento assoluto della massa, risulta individuato con $z(t)$ lo spostamento relativo tra vincolo e massa:

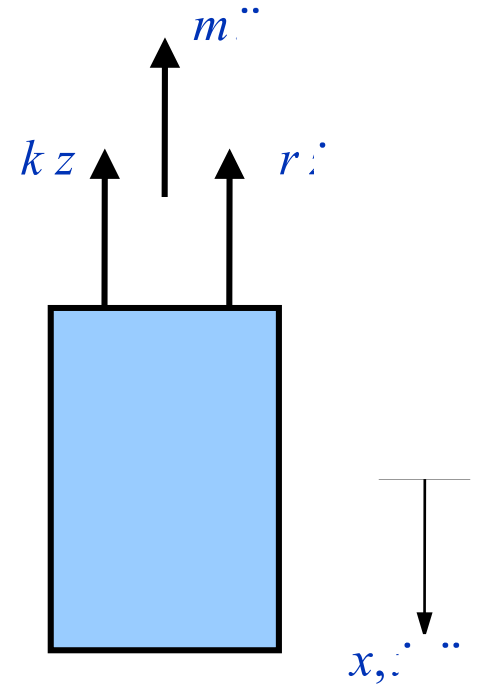
$$\boxed{x(t) = z(t) + y(t)}$$

Spostamento armonico del vincolo

L'equazione di equilibrio dinamico, a partire dalla posizione di molla deformata solo dall'applicazione statica del peso mg, può, pertanto, scriversi:

$$m$$

in quanto la forza d'inerzia insorge solo e soltanto per la presenza di una accelerazione assoluta, mentre sia la forza viscosa che quella elastica nascono solo per la presenza, rispettivamente, della velocità e dello spostamento relativo tra massa e vincolo.



Spostamento armonico del vincolo

Deriviamo l'equazione dello spostamento del vincolo y(t):

$$\operatorname{sen}\Omega t$$

$$\Omega^2 \cos\Omega t$$

possiamo ottenere, quindi, le equazioni differenziali del moto assoluto x(t):

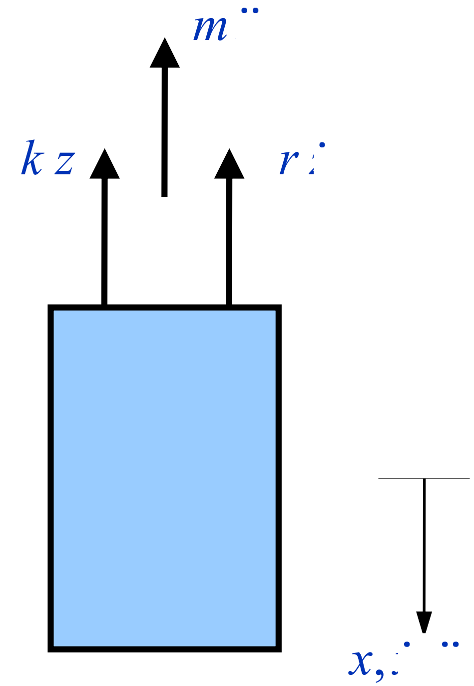
$$m \qquad - y) = 0$$

$$m \qquad k\, y_0 \cos\Omega t - r\, y_0\, \Omega \operatorname{sen}\Omega t$$

e del moto relativo z(t):

$$m($$

$$m \qquad m\, y_0\, \Omega^2 \cos\Omega t$$



Spostamento armonico del vincolo

Moto assoluto *x*(t)

$$m \qquad\qquad k\,y_0 \cos\Omega\mathrm{t} - r\,y_0\,\Omega\,\mathrm{sen}\Omega\mathrm{t}$$

essendo il sistema lineare, l' equazione può essere studiata considerando singolarmente l'effetto dei due termini armonici presenti a secondo membro e, applicando successivamente il principio di sovrapposizione degli effetti, ricavare la legge del moto assoluto $x(\mathrm{t})$, a regime, della massa vibrante.

La massa, infatti, a seguito dello spostamento armonico del vincolo si comporta come un oscillatore elementare smorzato soggetto all'azione contemporanea di due forzanti armoniche di uguale pulsazione Ω e, rispettivamente, di ampiezza $(k\,y_0)$ e ed $(r\,y_0\,\Omega)$.

Spostamento armonico del vincolo

Moto assoluto *x*(t)

$$m\ddot{}\qquad\dot{}\qquad\qquad k\,y_0\cos\Omega t - r\,y_0\,\Omega\,\mathrm{sen}\,\Omega t$$

Si può, pertanto, scrivere:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = X_1\cos(\Omega t - \psi_1) + X_2\,\mathrm{sen}(\Omega t - \psi_1) =$$
$$= y0\left(\frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2+(2ah)^2}}\cos(\Omega t - \psi_1) + \frac{2ah}{\sqrt{(1-a^2)^2+(2ah)^2}}\,\mathrm{sen}(\Omega t - \psi_1)\right)$$

che risulta essere la somma di due moti armonici di diversa ampiezza, ma di uguale pulsazione Ω e sempre sfasati tra di loro di 90°.

Spostamento armonico del vincolo

Moto assoluto *x*(t)

$$m\,\ddot{\ } \qquad \dot{\ } \qquad k\,y_0 \cos\Omega t - r\,y_0\,\Omega\,\mathrm{sen}\,\Omega t$$

L'angolo di fase ψ_1, tra il moto assoluto x(t), della massa e quello y(t) del vincolo, dipendendo oltre che dalla pulsazione Ω dai soli parametri del sistema vibrante, risulta uguale per entrambi i moti, e vale:

$$tg\,\psi_1 = \frac{2a\,h}{1-a^2}$$

L'equazione x(t) può essere riscritta nel seguente modo:

$$x(\mathrm{t}) = X\cos\left(\Omega \mathrm{t} - \psi_1 - \psi_2\right) \quad \text{con} \quad X = \sqrt{\frac{1+\left(2a\,h\right)^2}{\left(1-a^2\right)^2+\left(2a\,h\right)^2}} \qquad tg\,\psi_2 = \frac{1}{2a\,h}$$

Spostamento armonico del vincolo

Moto relativo *z*(t)

$$m\ddot{}\qquad\dot{}\qquad\qquad m\,y_0\,\Omega^2\cos\Omega\mathrm{t}$$

L' equazione del moto relativo $z(\mathrm{t})$ è formalmente del tutto analoga all'equazione ricavata per il sistema elementare forzato: pertanto si può affermare che un sistema vibrante forzato dallo spostamento armonico del vincolo,

$$y(\mathrm{t}) = y_0\cos\Omega\mathrm{t}$$

si comporta come un sistema forzato, con fittizia forzante sinusoidale di ampiezza pari a:

$$F_0 = m\,y_0\,\Omega^2$$

Spostamento armonico del vincolo

Moto relativo *z*(t)

$$m\,\ddot{\ }\qquad\dot{\ }\qquad m\,y_0\,\Omega^2\cos\Omega t$$

Valgono, pertanto, per il moto relativo $z(t)$ della massa vibrante le seguenti relazioni:

$$z(t) = Z\cos(\Omega t - \psi)$$

$$Z = \frac{m\,y_0\,\Omega^2}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \left(r\Omega\right)^2}} = \frac{y_0\,a^2}{\sqrt{\left(1 - a^2\right)^2 + \left(2a\,h\right)^2}} \qquad tg\,\psi = \frac{2a\,h}{1 - a^2}$$

Spostamento armonico del vincolo

Coefficienti di trasmissibilità

definiamo ***coefficiente di trasmissibilità assoluta*** il rapporto tra il modulo dello spostamento assoluto e l'ampiezza dello spostamento del vincolo:

$$\boxed{t_a = \frac{|x|}{y_0}}$$

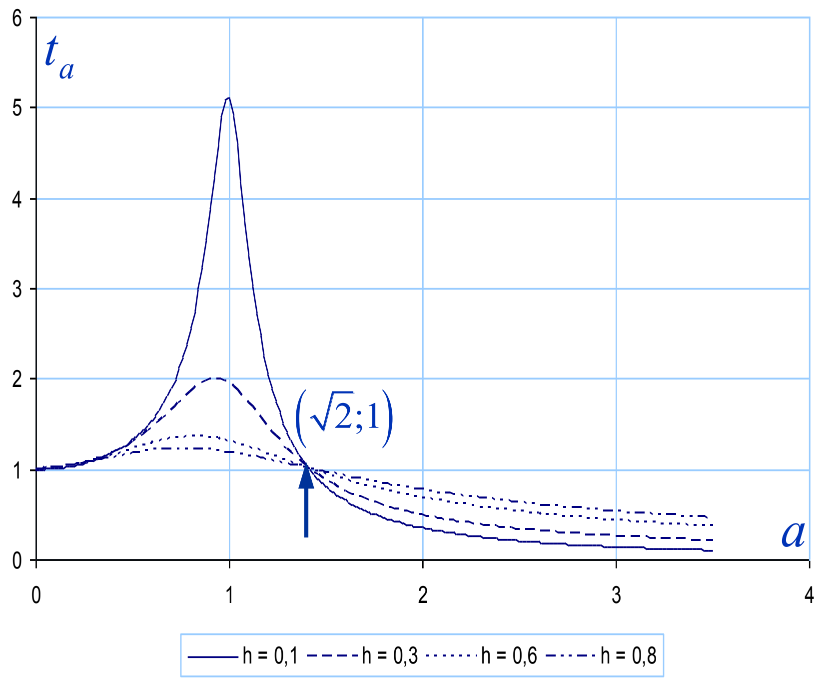
definiamo ***coefficiente di trasmissibilità relativa*** il rapporto tra il modulo dello spostamento relativo e l'ampiezza dello spostamento del vincolo:

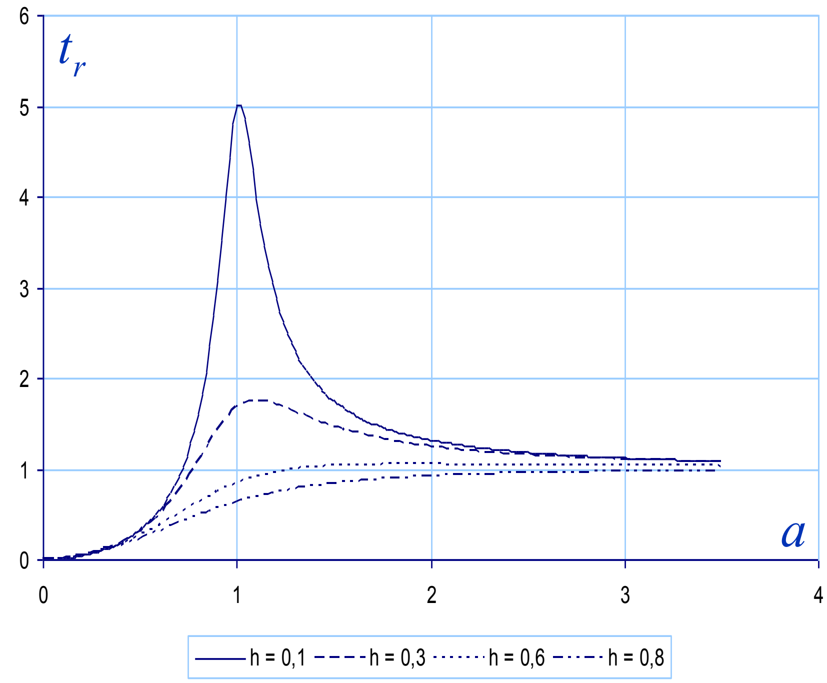
$$\boxed{t_r = \frac{|z|}{y_0}}$$

I ***coefficienti di trasmissibilità*** si possono diagrammare in funzione di a:

Spostamento armonico del vincolo

Coefficienti di trasmissibilità

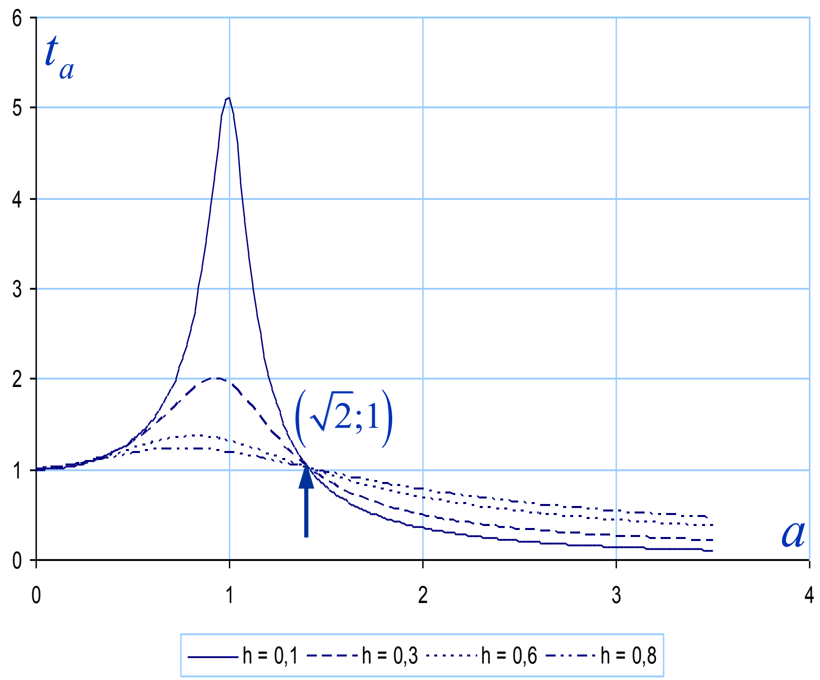


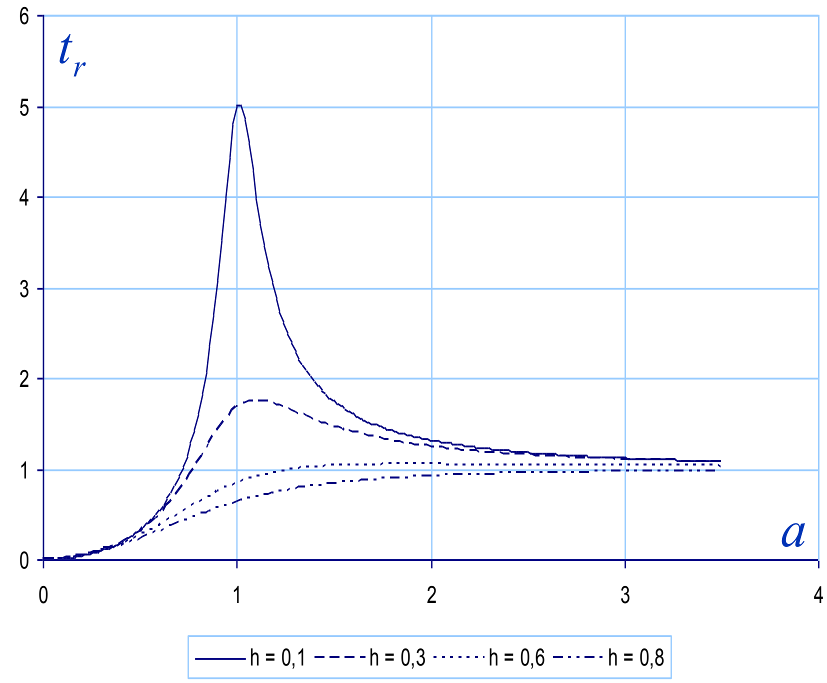


Anche in questo caso i due diagrammi possono essere analizzati nelle tre zone fondamentali in cui è possibile dividerli:

Spostamento armonico del vincolo

Coefficienti di trasmissibilità

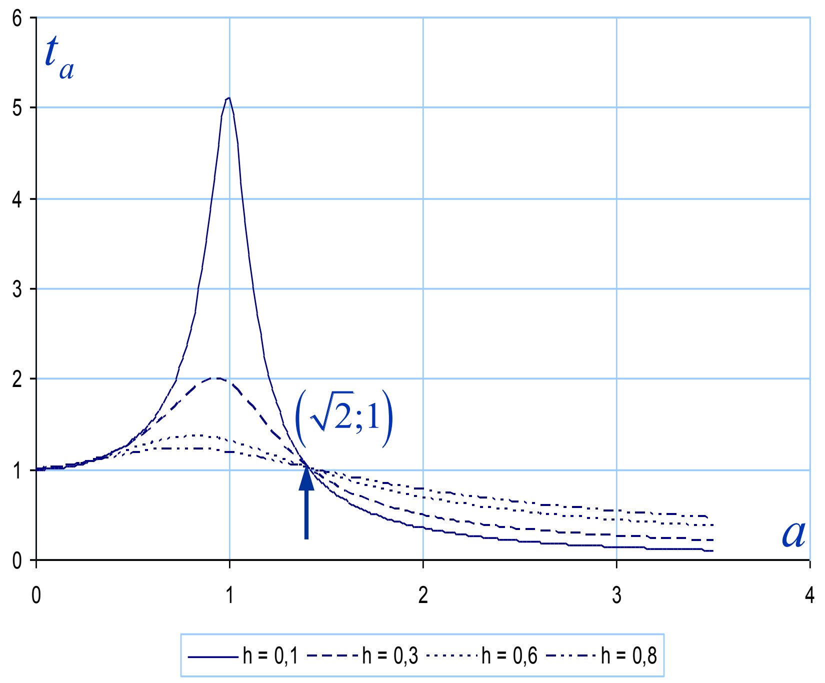


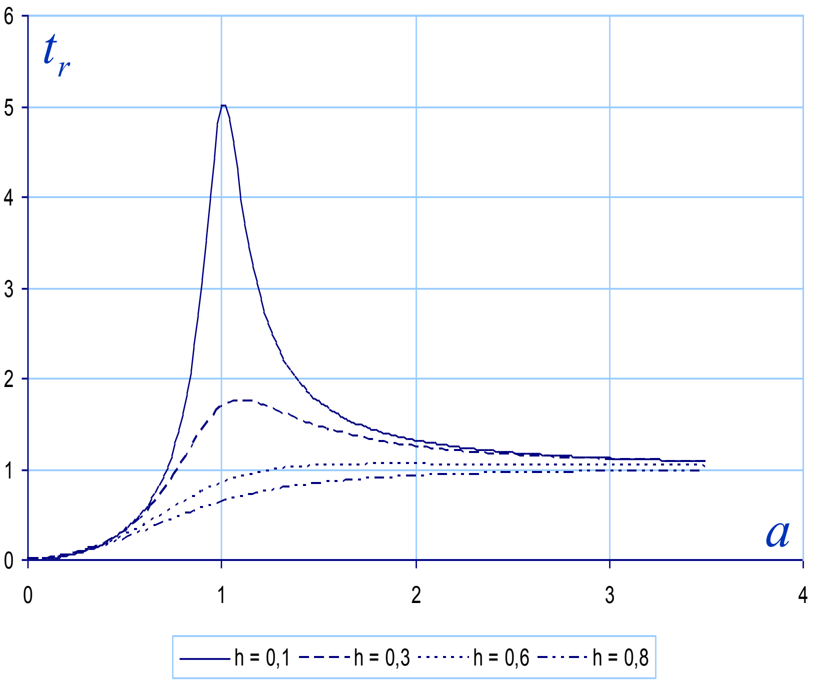


Per **a ≪ 1** lo spostamento assoluto della massa è quasi uguale a quello del vincolo, quello relativo quasi nullo. In questo caso la molla e lo smorzatore non intervengono, il sistema, nel suo complesso, si comporta come se fosse rigidamente collegato al vincolo.

Spostamento armonico del vincolo

Coefficienti di trasmissibilità

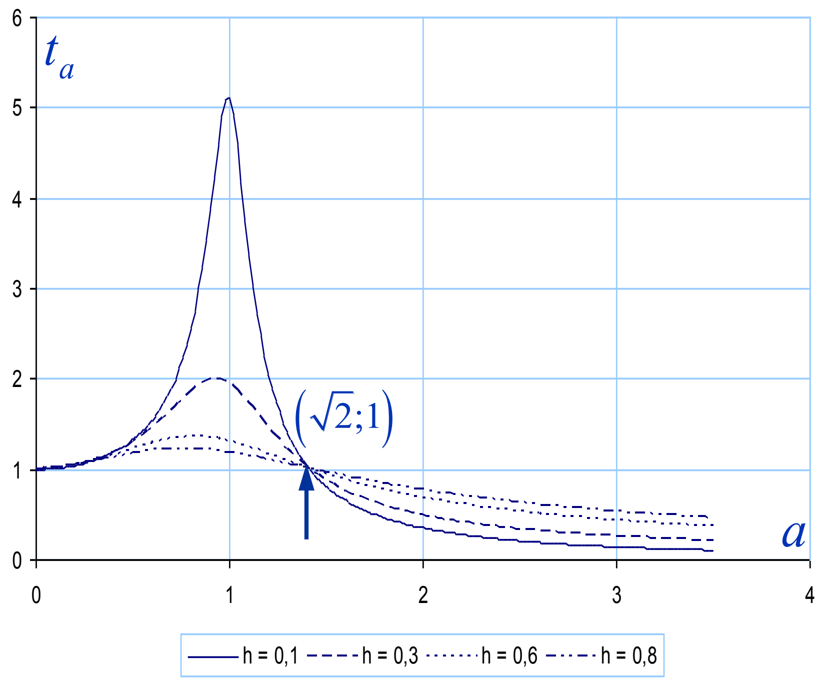


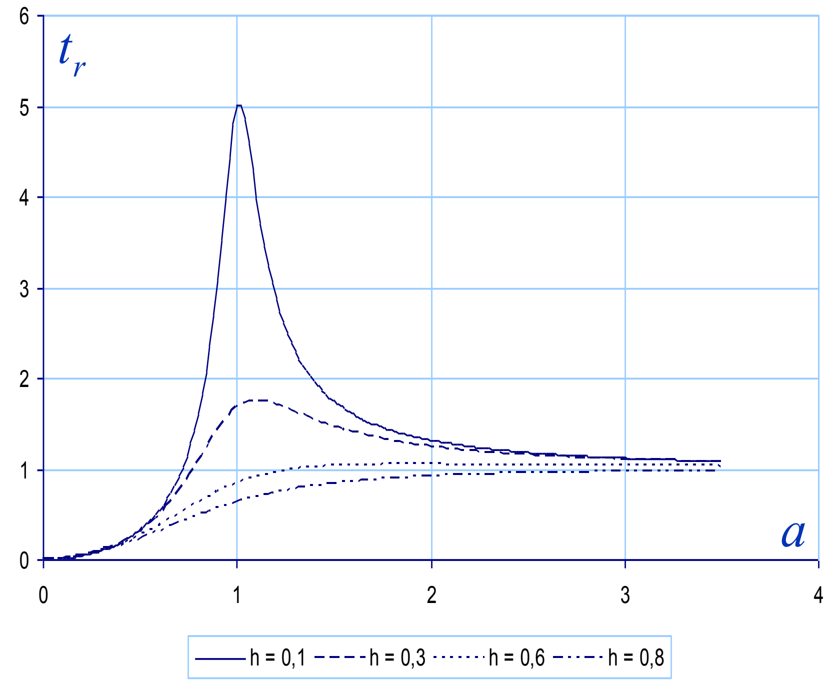


Per **a = 1** in condizione di ***risonanza***, il sistema non può più considerarsi rigido e lo spostamento, sia assoluto che relativo, risulta sempre molto maggiore di quello del vincolo.

Spostamento armonico del vincolo

Coefficienti di trasmissibilità





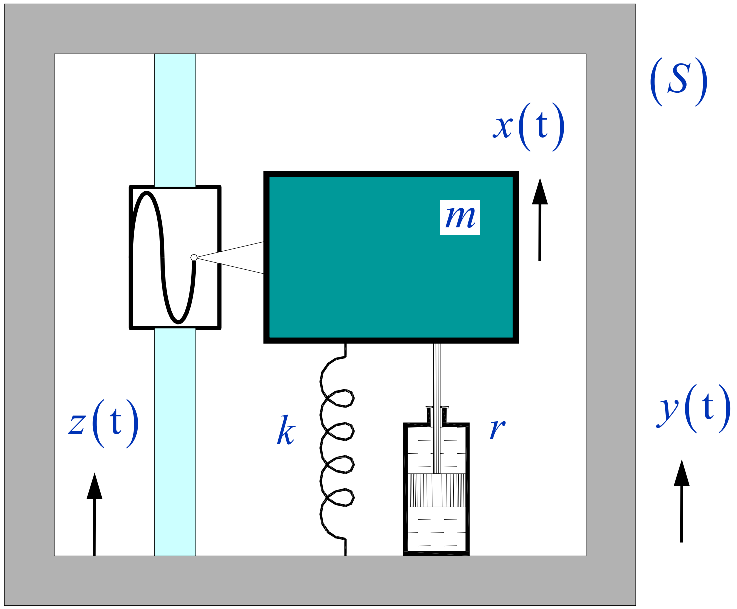
Per **a ≫ 1** lo spostamento assoluto tende a zero, in quanto lo spostamento relativo e quello del vincolo tendono a diventare uguali ma di verso opposto (l'angolo di fase ψ tende a π). La vibrazione del vincolo non è più capace di far muovere la massa.

Sismografi ed accelerometri

Lo studio effettuato su questo sistema vibrante ci permette di capire il funzionamento di due particolari strumenti di misura: il ***sismografo*** e l'***accelerometro***.

Questi permettono di misurare, rispettivamente, lo spostamento o l'accelerazione assoluta di un corpo vibrante, nel caso in cui non sia disponibile un punto di riferimento fisso.

Consistono, fondamentalmente, in una scatola, che deve essere collegata rigidamente al corpo vibrante, alla quale viene vincolata elasticamente una massa.

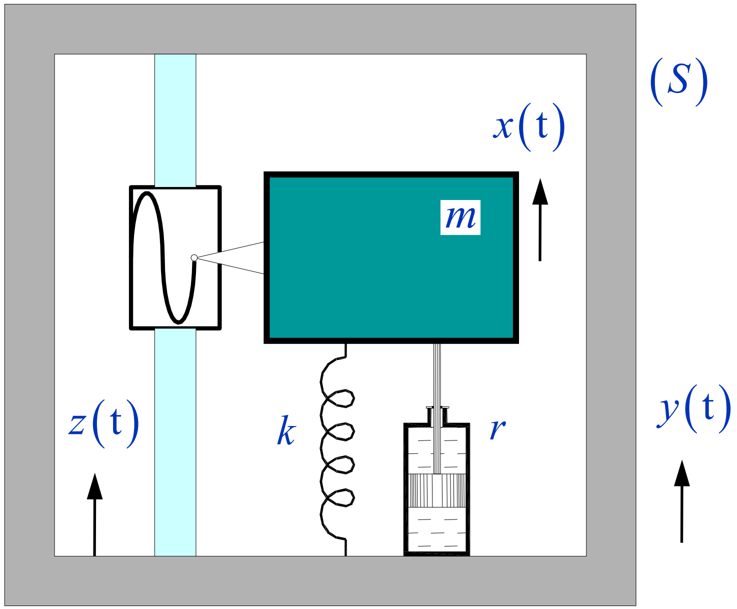


La massa può muoversi solo in una prefissata direzione, quella del moto vibratorio che s'intende misurare, in modo da riprodurre lo schema di figura.

Sismografi ed accelerometri

Sismografo

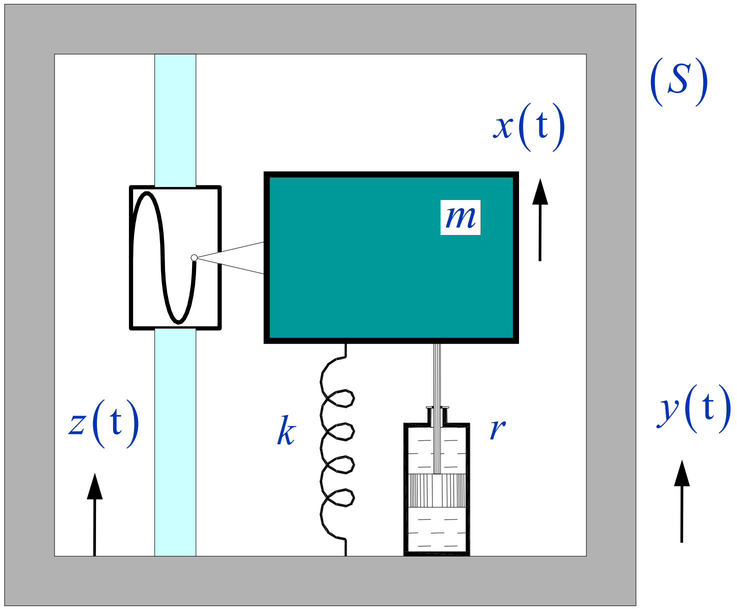
La difficoltà maggiore che s'incontra quando si voglia misurare l'ampiezza delle oscillazioni del terreno, indotte da un evento sismico, è la ricerca di un sistema assoluto a cui fare riferimento. La massa del sismografo può diventare tale riferimento. Se, conoscendo l'entità media della pulsazione Ω del sisma che si vuole misurare, si costruisce uno strumento con frequenza propria ω relativamente bassa, si otterranno sicuramente alti valori del rapporto adimensionale a e, perciò, indipendentemente dal valore di h, ci si troverà sempre ad operare nella zona dei diagrammi per **a $\gg$ 1**.



Sismografi ed accelerometri

Sismografo

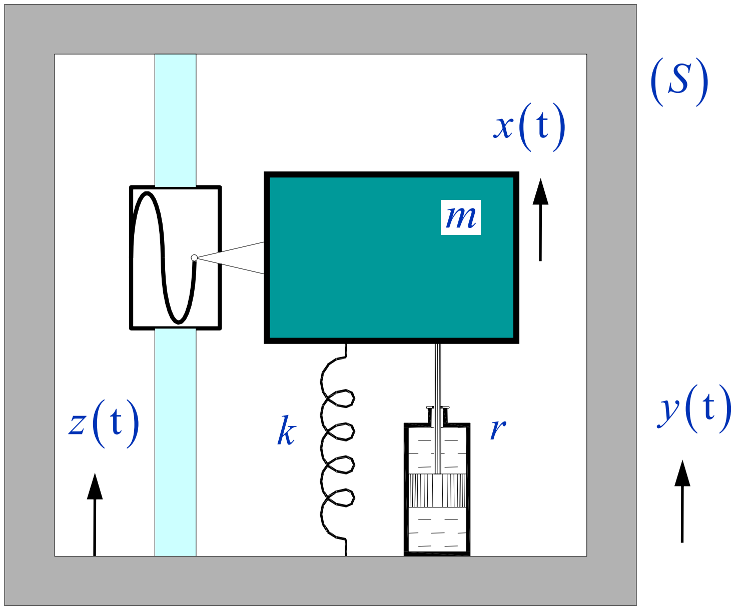
Da questi si può rilevare che t_a è prossimo allo zero, cioè il moto assoluto della massa è nullo e questa diviene origine del sistema assoluto di rilevamento, mentre t_r si approssima all'unità, il che vuol dire che il moto relativo della massa rispetto alla scatola (telaio) è uguale allo spostamento del terreno da misurare (anche se in opposizione di fase).



Sismografi ed accelerometri

Accelerometro

Negli accelerometri, al contrario, si costruisce lo strumento con una elevata frequenza propria in confronto a quella che s'intende misurare. Lo strumento funzionerà nella zona dei predetti diagrammi per **a ≪ 1** e, pertanto, si ottiene $x(\mathrm{t})=y(\mathrm{t})$.



Nell'equazione:

$$Z=\frac{m\,y_0\,\Omega^2}{\sqrt{\left(k-m\Omega^2\right)^2+\left(r\,\Omega\right)^2}}$$

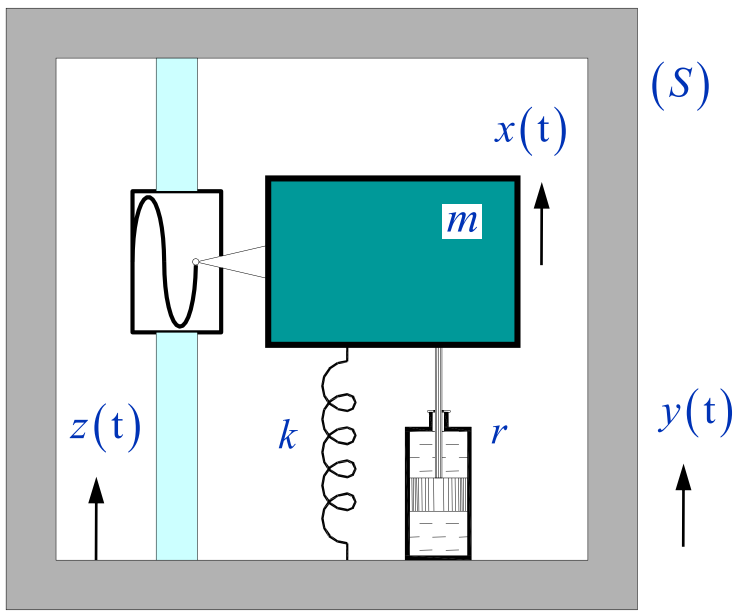
il denominatore tende all'unità dando luogo alla seguente relazione approssimata:

Sismografi ed accelerometri

Accelerometro

$$Z = \frac{m\, y_0\, \Omega^2}{k} = \frac{y_0\, \Omega^2}{\omega^2}$$

Questa relazione ci mostra chiaramente che il valore dell'ampiezza che si rileva è direttamente proporzionale all'accelerazione del moto vibratorio in esame. Per far si che la banda di frequenza utile di questi strumenti possa essere il più estesa possibile si deve scegliere un valore di h = 0.65 ÷ 0.70, per il quale la curva si mantiene quasi piatta, con valori di t_a prossimi ad uno, fin quasi alla 'risonanza'.



Sismografi ed accelerometri

Da quanto detto precedentemente i sismografi vengono normalmente costruiti con una frequenza propria compresa tra 1 e 30 Hz, mentre gli accelerometri hanno valori di chilohertz.

Quando, per entrambi gli strumenti, la pulsazione Ω della vibrazione da misurare si avvicina a quella propria ω degli strumenti occorre effettuare una correzione sia del valore dell'ampiezza che della fase.

I valori delle ampiezze indicati dagli strumenti, pertanto, devono essere divisi per il 'fattore di amplificazione' dello strumento stesso, che per i sismografi risulta pari a:

$$\frac{a^2}{\sqrt{\left(1-a^2\right)^2+\left(2ah\right)^2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{\left(1-a^2\right)^2+\left(2ah\right)^2}}$$

sismografi | accelerometri

Sismografi ed accelerometri

Per entrambi gli strumenti il valore dell'effettivo angolo di fase ψ si ottiene diminuendo quello rilevato dallo strumento del seguente angolo:

$$arctg\left(\frac{2a\,h}{1-a^2}\right)$$

Attualmente tutti gli accelerometri sono corredati della propria curva di calibrazione, in funzione della frequenza, in modo da poter facilmente effettuare le opportune correzioni dei dati letti e del range di frequenza per il quale il ‘fattore di amplificazione’ dello strumento risulta uguale ad uno.